Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

universität wien

Schriftenreihe zur

Didaktik der Mathematik

der

Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)

Heft 55 **2023**

M: Mathematik FD: Fachdidaktik A: Allgemeines

Vorträge der 43. Lehrerfortbildung am 14. April 2023
an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien

Impressum:

ISSN: 2411-5290

Herausgeber: Österreichische Mathematische Gesellschaft (ÖMG)

http://www.oemg.ac.at

Redaktion:
Didaktikkommission der ÖMG
Vorsitz: Hans Humenberger
Schriftführung: Maria Koth

Vervielfältigung (Druck): Stadtschulrat für Wien

Die hier abgedruckten Beiträge stehen im pdf-Format auch online zur Verfügung:
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html
ISSN der online-Version: 2411-5312

Die Beiträge umfassen u. a. Themen aus folgenden Gebieten, wobei Mathematiklehrkräfte an Höheren Schulen die primären Adressatinnen und Adressaten sind:

- Mathematikdidaktik
- Aus- und Fortbildung der Mathematiklehrkräfte
- Stoffliche Aufbereitung elementarmathematischer Inhalte
- Einschlägige Darstellungen mit historischen Schwerpunkten

Autorinnen und Autoren werden gebeten ihre Beiträge in WORD oder LaTeX abzufassen, wobei es für beide Fälle zu verwendende Formatvorlagen gibt.

Kontakt:
Dr. Maria Koth
Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A – 1090 Wien
Email: *maria.koth@univie.ac.at*

Überzeugungen österreichischer Gymnasiallehrkräfte zum Zusammenspiel von Technologieeinsatz und prozeduralem Wissen

CHRISTOPH ABLEITINGER, WIEN; CHRISTIAN DORNER, GRAZ

Der vorliegende Artikel beschäftigt sich mit der Frage, welche Überzeugungen Mathematiklehrkräfte von AHS-Maturaklassen zum Technologieeinsatz im Unterricht und zum Lernen von Mathematik an sich haben, wie sich diese Überzeugungen auf die Häufigkeit der Technologienutzung im Unterricht auswirken und welche Zusammenhänge es zum prozeduralen Wissen ihrer Schüler*innen am Ende der Sekundarstufe II gibt. Die durchgeführte Erhebung unter 25 Lehrkräften zeigt, dass im Wesentlichen ausschließlich die prinzipielle, selbst eingeschätzte Technologieaffinität von Lehrer*innen dazu führt, dass digitale Werkzeuge häufiger verwendet werden. Während in anderen Publikationen nachgewiesen werden konnte, dass es keinen signifikanten Zusammenhang zwischen der Technologienutzungshäufigkeit und dem prozeduralen Wissen der Schüler*innen gibt, zeigt sich in den hier vorliegenden Daten, dass die Schüler*innen, deren Lehrkräfte einem technologiefreien Teil bei der Matura eher zustimmen, über mehr prozedurales Wissen verfügen.

1. Einleitung

Diskussionen über die Häufigkeit der Einsatzes von Technologie im Mathematikunterricht bewegen sich im Wesentlichen zwischen zwei Polen: Einerseits wird über mangelnde operative Fertigkeiten von Studienanfänger*innen an Hochschulen (Matyas & Drmota 2018) geklagt und die Schuld beim zunehmenden Einsatz technologischer Hilfsmittel (graphikfähige Taschenrechner bzw. GeoGebra) gesehen, andererseits befindet sich derzeit das Schulsystem im Umbruch, weil sich die in der Gesellschaft stattfindende Digitalisierung auch im Schulunterricht niederschlagen soll (BMBWF 2023a). Das fordert beispielsweise die deutsche Kultusministerkonferenz, wenn von der verbindlichen Nutzung höherwertiger Technologie im Unterricht die Rede ist (KMK 2009). Im neuen österreichischen Mathematik-Lehrplan für die Sekundarstufe I spiegelt sich diese Diskussion wider, hier wird eine „Balance" gefordert zwischen der Nutzung digitaler Technologien und manuell-operativer Fertigkeiten (BMBWF 2023b).

Die fortschreitende Entwicklung von Mathematiksoftware, die passgenau für die Anwendung im Mathematikunterricht konzipiert wurde (insbesondere GeoGebra), hat dazu beigetragen, dass sich die Zielsetzungen des Mathematikunterrichts verändert haben. Das Auslagern von operativen Anteilen an digitale Werkzeuge schafft Freiräume für andere Tätigkeiten wie das Modellieren, das Argumentieren und das Interpretieren. Dynamische Geometriesoftware bereitet neue Möglichkeiten für das experimentelle Entdecken mathematischer Zusammenhänge und das Aufstellen von Vermutungen. Insofern wurde in die Technologie die große Hoffnung gesetzt, einen Beitrag zum Erwerb konzeptuellen Wissens und tieferen Verstehens zu leisten. Für die didaktische Umsetzung all dieser Ideen wurden in den letzten Jahren zahlreiche Fortbildungsinitiativen für österreichische Mathematiklehrkräfte umgesetzt.

Auf der anderen Seite zeigt sich, dass an tertiären Bildungseinrichtungen immer noch großer Wert auf operative Fertigkeiten gelegt wird. Das ist kein österreichisches Spezifikum, auch international zeigt sich, dass gerade im MINT-Bereich prozedurales Wissen sowohl beim Lehren als auch bei Prüfungen eine bedeutende Rolle spielt (Bergquist 2007, Bergsten et al. 2017, Engelbrecht et al. 2009).

In Österreich hat das dazu geführt, dass mit dem Maturatermin Mai 2028 ein technologiefreier Teil bei der standardisierten Reifeprüfung eingeführt wird, auch um dem „Rechnen ohne Taschenrechner" wieder mehr Raum zu geben (BMBWF 2022). Die Neukonzeption der Matura wurde durch die Beratungsgruppe Mathematik erarbeitet, der auch aktive Lehrkräfte angehören. Abgesehen davon gibt es aber wenig Informationen und erst recht keine wissenschaftlichen Erhebungen dazu, welche Überzeugungen österreichische Mathematiklehrkräfte zum Einsatz von Technologie bzw. dem damit in Verbindung ste-

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S. 1-14.

henden Lernen von Mathematik haben. Bis auf einzelne Statements zur vermuteten Wirkung des Technologieeinsatzes wie „Vor allem mathematisch weniger begabte Schüler verlieren die ‚Bodenhaftung' und klopfen alles mit der SOLVE-Funktion in ihre Rechner" (Mathematiklehrkraft im Standard 2019) in Zeitungsartikeln, findet man keine öffentlichen Aussagen dazu. Diesem Mangel wollen wir mit der vorliegenden Studie begegnen, indem wir die Überzeugungen von Lehrkräften von AHS-Maturaklassen strukturiert erheben und in Verbindung mit der tatsächlichen Technologienutzungshäufigkeit in der Klasse und dem prozeduralen Wissen der entsprechenden Schüler*innen setzen.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die in der empirischen Studie verwendeten Begriffe geklärt. Das betrifft zuerst die Überzeugungen der Lehrkräfte zur Technologie und ihren Einsatz in der Schule, danach generelle *Beliefs* von Lehrkräften zum Lernen von Mathematik und schließlich die Konzeptualisierung prozeduralen Wissens für die Auswahl geeigneter Testitems.

2.1 Überzeugungen zum Technologieeinsatz

Überzeugungen von Lehrer*innen zur Technologie an sich und zu ihrem Einsatz im Mathematikunterricht spielen bei der Entscheidung darüber, wie häufig und zu welchem Zweck sie im Unterricht genutzt wird, eine zentrale Rolle. Seit etwa 2000 wurden deshalb qualitative Studien zu technologiebezogenen Überzeugungen von Mathematiklehrkräften durchgeführt (z. B. Doerr & Zangor 2000; Drijvers et al. 2010). Quantitative Erhebungen gab es erst danach, im deutschsprachigen Raum vorangetrieben durch die Entwicklung eines geeigneten, validierten Messinstruments durch Thurm et al. (2017), das wir auch im Rahmen der vorliegenden Studie verwenden.

Unter den Begriff Technologie fallen in der vorliegenden Arbeit digitale Mathematikwerkzeuge (vgl. KMK 2012), dazu zählen wissenschaftliche und graphikfähige Taschenrechner, dynamische Geometrie-Software, Computeralgebra-Systeme und Tabellenkalkulationsprogramme (vgl. Heintz et al. 2014). Es werden in der Literatur zahlreiche Vorteile bzw. Potenziale des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht genannt und diskutiert, z.B. das Auslagerungsprinzip oder die mögliche Betonung des Entdeckens bzw. Problemlösen im Lernprozess. Im Zusammenhang mit prozeduralem Wissen wird umgekehrt die Befürchtung geäußert, wonach durch zu häufigen Technologieeinsatz mathematische Grundfertigkeiten nicht mehr technologiefrei ausgeführt werden können (Handal et al. 2011). Dennoch sind für die Entscheidung über die Häufigkeit und die Art des Einsatzes von Technologie im Mathematikunterricht weniger solche Studienergebnisse relevant, als die Überzeugungen der Lehrkräfte, die das Handeln im Unterricht nachweislich beeinflussen (Baumert & Kunter 2006).

Dem Messinstrument von Thurm et al. (2017) liegt das Konstrukt der *technologiebezogenen Überzeugungen* zugrunde. Überzeugungen fassen sie entsprechend Philipp (2007) als kaum veränderbar und überwiegend kognitiv auf:

> *"Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. Beliefs are more cognitive, are felt less intensely, and are harder to change than attitudes. Beliefs might be thought of as lenses that affect one's view of some aspect of the world or as dispositions toward action. Beliefs, unlike knowledge, may be held with varying degrees of conviction and are not consensual. Beliefs are more cognitive than emotions and attitudes."* (Philipp 2007, S. 259 zitiert nach Thurm et al. 2017, S. 3-4)

Durchaus haben diesem Verständnis nach Überzeugungen auch eine affektive Komponente, d. h. sie beeinflussen das Handeln der Lehrperson im Unterricht. Bei *technologischen Überzeugungen* halten wir uns ebenfalls an Thurm et al. (2007), die darunter jene Überzeugungen verstehen, *„die sich auf den Einsatz von Technologie als Objekt der Überzeugungen* […] *beziehen"* (Thurm et al. 2017, S. 3).

2.2 Überzeugungen zum Lernen von Mathematik

Überzeugungen bzw. *Beliefs* (hier synonym verwendet) von Lehrkräften zum Mathematiklernen kommt nachweislich für die Unterrichtsgestaltung und generell ihr berufliches Handeln eine große Bedeutung zu (Reusser & Pauli 2014, Bråten 2010). In der Forschung zu *Beliefs* wird seit vielen Jahrzehnten um einheitliche Begriffe gerungen. In diesem Zusammenhang spricht Pajares (1992) von einem „messy construct", das in unterschiedlichen Studien sehr unterschiedlich konzeptualisiert und operationalisiert wird. Durchgesetzt hat sich zumindest die Klassifikation in epistemologische, personenbezogene und kontextbezogene *Beliefs* (Oser & Blömeke 2012, Hofer & Pintrich 1997). Die für unsere Studie relevanten Überzeugungen betreffen die Lernprozesse der Schüler*innen und sind demnach den epistemologischen *Beliefs* zuzuordnen.

Bei der internationalen Vergleichsstudie TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics) zur Wirksamkeit der Lehrer*innenausbildung wurden Überzeugungen zur Natur des Fachs Mathematik erhoben, wobei zwischen einer statischen (kalkülbezogene Aspekte der Mathematik) und einer dynamischen (prozesshafter Charakter der Mathematik) Perspektive unterschieden wurde (Blömeke et al. 2012). Bei den *Beliefs* zum Lernen von Mathematik wurde zwischen konstruktivistischen (schüler*innenorientiert, kognitiv aktivierend, vgl. Peterson et al. 1989) und eher transmissionsorientierten (lehrer*innengesteuerte Vermittlung, standardisierte Verfahren) Sichtweisen differenziert. Diese Unterscheidung spielt im Zusammenhang mit prozeduralem Wissen eine bedeutende Rolle, da es dabei gerade um das direktive Abarbeiten vorgegebener Prozeduren geht. Es ist daher von Interesse zu untersuchen, inwieweit bestimmte Überzeugungen von Lehrkräften in dieser Hinsicht Einfluss auf die Ausrichtung des Unterrichts und damit auf das prozedurale Wissen ihrer Schüler*innen haben.

2.3 Prozedurales Wissen

Der Begriff „Prozedurales Wissen" wird im wissenschaftlichen Alltag oft synonym zu Begriffen wie „Operatives Arbeiten" oder „Rechenfertigkeiten" verwendet. Für eine empirische Erhebung prozeduralen Wissens und die damit verbundene Entwicklung bzw. Auswahl passender Testitems ist allerdings eine genaue begriffliche Fassung erforderlich. Wir beziehen uns bei der Beschreibung von Prozeduren auf die Arbeit von Hiebert und Lefevre (1986), die als ihre zentrale und charakterisierende Eigenschaft das Abarbeiten einer vorbestimmten linearen Abfolge von Schritten sehen. Eine Prozedur ist in diesem Sinn eine Schritt-für-Schritt-Anweisung, die angibt, wie ein spezieller Typ von Aufgabe zu lösen ist. Bei der Erstellung von Items ist demnach darauf zu achten, dass die in der Aufgabe relevante Prozedur aus dem Unterricht bekannt ist, dass die Proband*innen das Lösungsverfahren nicht selbst auswählen müssen/können (dazu wäre prozedurale Flexibilität nötig, vgl. Rittle-Johnson et al. 2012) und dass der intendierte Lösungsprozess möglichst deterministisch und seriell abzuarbeiten ist.

Aufbauend darauf differenziert Altieri (2016) prozedurales Wissen aus in Kalkülkenntnis (Kenntnis der spezifischen Prozedur, um entsprechende Aufgaben zu lösen) und Kalkülfertigkeit (notwendige Fertigkeiten, um Kalkülkenntnis fallspezifisch korrekt und in angemessener Zeit anzuwenden). Während Kalkülkenntnis also aufgabenspezifisch ist, umfasst Kalkülfertigkeit mathematische Fertigkeiten, die beim Abarbeiten unterschiedlicher Prozeduren notwendig sind (z. B. algebraische Umformungen, Bruchrechnen, Einsetzen in einer Formel, etc.)

3 Stand der Forschung

Dieser Abschnitt widmet sich Forschungsergebnissen aus Studien zu prozeduralem Wissen von Schüler*innen, zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht und zu Überzeugungen von Mathematiklehrkräften.

3.1 Prozedurales Wissen

Die Suche nach wissenschaftlichen Arbeiten, die rein prozedurales Wissen von Schüler*innen erheben, gestaltet sich schwierig. Die meisten Publikationen berichten von mathematischen Leistungen im Allgemeinen und differenzieren nicht zwischen den Wissensarten. Man denke an PISA oder TIMSS, die im großen Stile Bildungssysteme und eben auch mathematische Leistungen von Schüler*innen vergleichen. Hier obliegt es einzelnen Wissenschaftler*innen, sich die Daten nochmals genauer anzuschauen. Neubrand et al. (2002) bzw. Neubrand (2013) haben durch eine Differenzierung der PISA-Aufgaben in „technische Aufgaben", „rechnerische Modellierungsaufgaben" und „begriffliche Modellierungsaufgaben" Schwierigkeitsmerkmale zu diesen Typen auf Basis der Ergebnisse der deutschen Schüler*innen im Jahr 2000 ermittelt. Die Schwierigkeitsgenerierung bei „technische Aufgaben", die im Wesentlichen prozedurales Wissen im Sinne von Altieri (2016) abprüfen, hängt einzig und allein von der curricularen Wissensstufe ab, also der Zuordnung der Aufgabe zu den jahrgangsmäßig aufgelisteten Stoffgebieten im Lehrplan: Je später eine Aufgabe im Lehrplan verortet werden kann, desto schwerer fällt den Schüler*innen die Lösung dieser Aufgabe. Zielgruppe der Testungen im Rahmen von PISA sind Schüler*innen im Alter von 15 bzw. 16 Jahren. Aussagen über das prozedurale Wissen österreichischer Schüler*innen am Ende der Sekundarstufe lassen sich also mit Hilfe der PISA-Testungen nicht treffen.

In Deutschland wurde festgestellt, dass Studieneingangstests mathematiklastiger Studiengänge an Universitäten vor allem prozedurales Wissen abtesten (Heinze et al. 2019). Von den Daten solcher Tests könnte man auf die Fähigkeiten der Schüler*innen am Ende der Sekundarstufe schließen, aber auch dazu gibt es keine veröffentlichten Ergebnisse österreichischer Universitäten. Erst das Projekt OFF („Operative Fähigkeiten und Fertigkeiten ohne den Einsatz technologischer Hilfsmittel am Ende der Schullaufbahn") nahm das prozedurale Wissen österreichischer Gymnasiast*innen in den Blick. Die Daten der ersten Erhebung im Jahr 2021 zeigen, dass die mittlere Lösungsquote der getesteten prozeduralen Aufgaben bei 36% liegt, Tab. 1 listet die getesteten Aufgaben dieser Erhebung auf, siehe Abschnitt 5.2. Die Autoren bezeichnen diese Quote als eher niedrig, weisen aber darauf hin, dass es keine älteren Vergleichswerte gibt (Dorner & Ableitinger 2022). Relativierend kann man aber sagen, dass prozedurale Aufgaben, die Expert*innen als wichtiger einschätzen (vierstufige Likert-Skala), im Sinne von „Schüler*innen der Abschlussklasse sollen die Aufgabe ohne Formelheft und ohne Taschenrechner lösen können" (1: ja, 2: eher ja, 3: eher nein, 4: nein), auch eine höhere Lösungsquote besitzen (Ableitinger & Dorner 2023). Des Weiteren konnten die Autoren die Ergebnisse von Neubrand et al. (2002) bestätigen, die Aufgabenschwierigkeit der prozeduralen Aufgaben hängt auch bei der OFF-Testung von der curricularen Wissensstufe ab.

3.2 Technologieeinsatz

Der Technologieeinsatz im Mathematikunterricht wurde bereits umfangreich beforscht. Vor allem Wirksamkeitsstudien waren und sind von regem Interesse. Der Einfluss der Technologienutzung auf mathematische Fähig- und Fertigkeiten stellte sich im Großen und Ganzen aber als kleiner als erhofft heraus (zusammengefasst in Drijvers et al. 2016). Wieder stehen bei diesen Analysen allgemeine mathematische Leistungen von Schüler*innen im Vordergrund. Kaum eine Studie fokussiert auf prozedurales Wissen.

Davon auszunehmen ist die Arbeit von Wynands (1984), er untersuchte die Auswirkungen eines gewöhnlichen (wissenschaftlichen) Taschenrechners auf die Rechenfertigkeiten von Schüler*innen am Ende der Sekundarstufe I. Es zeigte sich, dass Schüler*innen, die nach eigenen Angaben den Taschenrechner verwendeten, bei einer rechnerfreien Überprüfung keineswegs schlechter rechneten als Schüler*innen, die den Taschenrechner im Unterricht nicht verwendeten. Die Rechenleistungen wiesen laut Wynands (1984) ein eher niedriges Niveau auf, waren aber mit den Leistungen aus vortechnologischen Zeiten vergleichbar. Die derzeit häufig geäußerte Skepsis gegenüber höherwertiger Technologie bzw. digitaler Werkzeuge (CAS, DGS, etc.) erinnert an jene gegenüber dem gewöhnlichen Taschenrechner damals. Hierauf Bezug nehmend stellt Barzel (2012) in ihrer Metastudie klar, dass „rechnerfreie Fertigkeiten auch beim CAS-gestützten Unterricht zu erwerben sind“ (S. 39), diese Aussage stützt sie unter anderem auf die Ergebnisse einer kanadischen Studie (Kieran & Drijvers 2006) und auf den Schulversuch CAliMERO (Ingelmann 2009). Letztere Studie konnte nachweisen, dass durch ein speziell entwickeltes Unterrichtskonzept mathematische Grundfertigkeiten im CAS-gestützten Mathematikunterricht nicht verloren gehen. Insbesondere schnitten die Experimentalklassen bei Kopfrechentests gleich gut wie die Kontrollklassen ab (ebd.).

Um den derzeitigen Stellenwert der Technologienutzung in Österreichs Schulen einschätzen zu können, ist es von Interesse, in welchem Ausmaß (höherwertige) Technologie im Mathematikunterricht eingesetzt wird. Aus diesem Grund betrachten wir die Ergebnisse von Dorner und Ableitinger (2022), die den Zusammenhang zwischen Technologienutzungshäufigkeit und prozeduralem Wissen erforschten. Hier konnte kein Zusammenhang gefunden werden. Also Aussagen wie, je häufiger höherwertige Technologie im Unterricht verwendet wird, desto schlechter rechnen die Schüler*innen ohne diese Technologie, können auf Basis dieser Untersuchung nicht unterstützt werden. Die Ergebnisse zeigen, dass die Lehrkraft bzw. die Schüler*innen höherwertige Technologie typischerweise durchschnittlich jeweils ca. einmal pro Woche in der Oberstufe einsetzten (siehe Fragen H1 und H2 in Abschnitt 5.2). Das gilt auch für die Hausübungen (siehe Frage H3 ebd.). Der Mythos vom omnipräsenten Technologieeinsatz beim Mathematiklernen lässt sich aus den repräsentativ erhobenen Daten für den Großteil der österreichischen Gymnasien nicht bestätigen (Dorner & Ableitinger 2022).

3.3 Überzeugungen von Mathematiklehrkräften

Untersuchungen zu Überzeugungen von Mathematiklehrkräften lassen sich als äußerst wertvoll bezeichnen, denn Baumert und Kunter (2006) zeigten, dass diese das jeweilige Handeln der Lehrpersonen im Unterricht beeinflussen. Darüber hinaus konnten auch Zusammenhänge zwischen den mathematischen Leistungen der Schüler*innen und den Überzeugungen ihrer Lehrkräfte gefunden werden (Stern, 2002). Studien zum Zusammenhang von Lehrer*innenbeliefs und ihrem professionellen Wissen gibt es ebenfalls. Beispielsweise konnten Blömeke et al. (2012) nachweisen, dass leistungsstärkere Lehrkräfte typischerweise konstruktivistische Überzeugungen zum Lernen von Mathematik und ein eher dynamisches Verständnis vom Fach Mathematik haben. Umgekehrt lassen sich bei leistungsschwächeren Lehrkräften eher ein transmissionsorientiertes Verständnis vom Lernen sowie eine statische Sichtweise auf Mathematik nachweisen. Dieser Forschungsrichtung folgen wir in unserer Studie, in der wir unter anderem den Zusammenhang zwischen Lehrer*innenüberzeugungen und der Ausprägung einer ganz speziellen Wissensart ihrer Schüler*innen, nämlich des prozeduralen Wissens, untersuchen. Im Rahmen der TEDS-M-Studie wurden auch Ländervergleiche durchgeführt. Lehrer*innen aus Deutschland, Norwegen und der Schweiz lehnen transmissive Überzeugungen zum Lernen von Mathematik ab, im Gegensatz zu Lehrkräften aus den Philippinen und Malaysia. Im Mittel liegt aber die Zustimmung zu konstruktivistischen Überzeugungen zum Lernen von Mathematik über alle Länder, die an der TEDS-M-Studie teilnahmen, recht hoch (Blömeke et al. 2010).

Zu *technologiebezogenen Überzeugungen* gibt es bereits einige qualitative Studien, welche eine große Bandbreite an Überzeugungen und handlungsleitende Funktionen der Überzeugungen aufzeigen. Quantitative Studien zu diesen Überzeugungen findet man jedoch kaum (Thurm et al. 2017).

4 Forschungsfragen

In den theoretischen Grundlagen wurden die Dimensionen „Überzeugungen zum Technologieeinsatz“, „Überzeugungen zum Lernen von Mathematik“ und „prozedurales Wissen“ diskutiert, die die Grundlage des vorliegenden Forschungsprojekts darstellen. Aus diesen Dimensionen und ihren wechselseitigen Zusammenhängen ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

1. Welche Überzeugungen zum Technologieeinsatz bzw. zum Lernen von Mathematik haben Lehrer*innen von Maturaklassen an AHS?
2. Wie hängen diese Überzeugungen mit dem prozeduralen Wissen der von diesen Lehrer*innen unterrichteten Schüler*innen zusammen?
3. Wie häufig verwenden Lehrkräfte und Schüler*innen höherwertige Technologie typischerweise in der Oberstufe und welche Zusammenhänge gibt es zu den diesbezüglichen Überzeugungen der Lehrkräfte?

5 Methode

In diesem Abschnitt beschreiben wir die verwendeten Erhebungsinstrumente (Fragebögen und prozedurale Items) und erläutern das Vorgehen bei der Stichprobenziehung.

5.1 Lehrer*innenfragebogen

Um *technologiebezogene Überzeugungen* von Lehrkräften im Sinne von Philipp (2007) zu erheben, bedarf es eines passenden validierten Fragebogens. Thurm et al. (2017) publizierten ein entsprechendes Erhebungsinstrument, welches aus umfangreichen Vor- und Pilotstudien sowie weiteren Analysen hervorging. Die aus halbstrukturierten Interviews erhaltenen 29 Überzeugungsdimensionen wurden durch eine Faktorenanalyse im Rahmen einer folgenden Pilotstudie auf 8 reduziert (Thurm et al, 2007 S. 4–5). Wir verwendeten das aus der erwähnten Studie vorgeschlagene, 23 Items umfassende Basismodell zur Erhebung fünf latenter Dimensionen *technologiebezogener Überzeugungen* bei Lehramtsstudierenden. Diese Dimensionen lauten (Abkürzungen werden bei den Auswertungen angeführt, siehe Abschnitt 6):

- Allgemein positive Grundeinstellung gegenüber Technologie [Tech]
- Vorteile [Vor]
- Zeitaufwand [Zeit]
- Nachteile [Nach]
- Erst Mathematik, dann Technologie [Erstmat]

Die Bezeichnungen sind aus unserer Sicht selbsterklärend, daher werden keine weiteren Erklärungen angeführt (für detaillierte Beschreibungen siehe Thurm et al. 2017). Die Entscheidung für das Basismodell für Lehramtsstudierende anstatt jenes für Lehrkräfte erfolgte bewusst, da ersteres Fragen zur allgemeinen positiven Grundeinstellung von Mathematiklehrkräften gegenüber Technologie enthält. Dies kann zwar einerseits als Limitation der Studie gesehen werden, andererseits sind Ergebnisse zur Grundeinstellung aufgrund mangelnder Daten in diesem Bereich und immer wieder zu hörender Thesen über die Einschätzungen der Lehrkräfte diesbezüglich von besonderem Interesse. Ein Item (T4) wurde aufgrund der in Österreich unüblichen Formulierung „Mit Technologie kann man mich jagen“ zu „Mit Technologie möchte ich nichts zu tun haben“ abgeändert.

Die Erhebung der Überzeugungen der Mathematiklehrkräfte zum Lernen von Mathematik erfolgte mit dem von Laschke und Schmotz (2014) publizierten Fragebogen, welcher bereits in der TEDS-M-Studie seinen Einsatz fand. Das 14 Items umfassende Erhebungsinstrument gliedert sich entsprechend dem in Abschnitt 2.2 erwähnten Konstrukt in zwei Kategorien „learning math through active learning“ (passend zur konstruktivistisch orientierten Vermittlung, [Active]) und „learning math through teacher direction“ (passend zur transmissionsorientierten lehrer*innengesteuerten Vermittlung, [Directive]).

Abschließend enthält der Fragebogen noch weitere sechs Items zum Maturakonzept. Dabei handelt es sich um selbsterstellte, nicht validierte Items, deren Ergebnisse aber dennoch interessieren. Zwei Aussagen, die wir hier in die Auswertung aufnehmen, lauten wie folgt:

K3 Zur Lösung von Typ-1-Aufgaben soll auch zukünftig ein gewöhnlicher Taschenrechner (TI-30) erlaubt sein.

K4 Zur Lösung von Typ-1-Aufgaben soll auch zukünftig höherwertige Technologie (GeoGebra, TI-Nspire, Casio ClassPad) erlaubt sein.

Alle abgefragten Aussagen der insgesamt 43 Items waren auf einer fünfstufigen Likert-Skala einzuschätzen (von 1 „trifft zu“ bis zu 5 „trifft nicht zu“).

5.2 Erhebung prozeduralen Wissens der Schüler*innen und Schüler*innenfragebogen

Das prozedurale Wissen von Schüler*innen der Abschlussklasse an österreichischen AHS wurde mit einem mehrfach validierten (Expert*innenvalidierung, konvergente Validierung und lautes Denken) Aufgabenpaket erhoben, für weitere Details siehe Dorner und Ableitinger (2022) und Ableitinger und Dorner (2023). Dieses Paket umfasst 24 Items und testet das prozedurale Wissen österreichischer Gymnasiast*innen am Ende der Sekundarstufe ab. Um die Arbeitszeit der Schüler*innen während der Erhebung zu reduzieren, bekam ein*e Schüler*in zwölf Aufgaben zu bearbeiten, siehe Bezeichnung PA und PB in Tab. 1.

Nr.	Beschreibung	Nr.	Beschreibung
PA01	Formel umformen	PB01	Brüche addieren
PA02	Binomische Formel anwenden	PB02	Dezimalzahlen dividieren
PA03	Lineare Gleichung lösen	PB03	Partiell wurzelziehen
PA04	Polynomdivision durchführen	PB04	In Gleitkommadarstellung umwandeln
PA05	Potenzrechenregeln anwenden	PB05	2x2 Gleichungssystem lösen (Einsetzungsverf.)
PA06	Bruchgleichung lösen	PB06	Wurzelgleichung lösen
PA07	2x2 Gleichungssystem lösen (Eliminationsverf.)	PB07	Biquadratische Gleichung lösen
PA08	Quadratische Gleichung lösen	PB08	Skalarprodukt berechnen
PA09	Kreuzprodukt (Vektorprodukt) berechnen	PB09	Linearkombination berechnen
PA10	Differenzenquotient berechnen	PB10	Differenzieren mittels Produktregel
PA11	Polynomfunktion ableiten	PB11	Differenzieren mittels Kettenregel
PA12	Partielle Integration durchführen	PB12	Bestimmtes Integral berechnen

Tab. 1 Aufgabenpaket zur Erhebung des prozeduralen Wissens von Schüler*innen der Abschlussklasse

Zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage benötigt es Fragestellungen zur Erhebung der Technologienutzungshäufigkeit. Es erschien sinnvoll, drei Nutzungsarten abzufragen:

H1 Wie häufig hat Ihr*e **Mathematiklehrer*in** in der Oberstufe typischerweise höherwertige Technologie (z.B. GeoGebra, Casio ClassPad, TI-Nspire) im Unterricht eingesetzt? (Gewöhnliche Taschenrechner sind hier nicht gemeint.)“

H2 „Wie häufig haben **Sie** in der **Schulübung** in der Oberstufe typischerweise höherwertige Technologie (z.B. GeoGebra, Casio ClassPad, TI-Nspire) eingesetzt? (Gewöhnliche Taschenrechner sind hier nicht gemeint.)“

H3 „Wie häufig haben **Sie** bei der **Hausübung** in der Oberstufe typischerweise höherwertige Technologie (z.B. GeoGebra, Casio ClassPad, TI-Nspire) eingesetzt? (Gewöhnliche Taschenrechner sind hier nicht gemeint.)“

Die Antwortmöglichkeiten lauten: „(fast) jede Mathematikstunde“ (H1 und H2) bzw. „(fast) bei jeder Hausübung“ (H3), „ca. 1 Mal pro Woche“, „ca. 1-2 Mal pro Monat“, „seltener als 1 Mal pro Monat“ und „nie“. Die zuerst angeführte Antwortmöglichkeit erhielt bei der Dateneingabe den Wert 1, die zweite den Wert 2, usw. (Dorner & Ableitinger, 2022, übersetzt).

5.3 Stichprobe, Datenerhebung und Auswertungsmethoden

Die hier präsentierten Ergebnisse entstammen der ersten Erhebung des Projekts OFF im Jahr 2021. Das Projekt hat sich u.a. das Ziel gesetzt, das prozedurale Wissen von Schüler*innen der Abschlussklasse an österreichischen Gymnasien zu erheben und über mehrere Jahre (mindestens bis zur Einführung eines technologiefreien Teils bei der zentralen Reifeprüfung) zu beobachten. Aus diesem Grund stellen alle Schüler*innen in Abschlussklassen an österreichischen AHS die gesamte Zielpopulation dar. Nach den Empfehlungen von Bartok und Steinfeld (2015) wurde eine repräsentative Stichprobe gezogen. Aus organisatorischen Gründen konnten nur gesamte Schulklassen getestet werden, eine Erhebung auf Schüler*innenebene war nicht möglich. Für das *Sampling Frame* wurde die dankenswerterweise vom österreichischen Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) erhaltene Liste mit Schulcodes um die Stratifizierungsvariablen Bundesland, Schultyp und Urbanisierungsgrad ergänzt. Aus jedem Stratum wurden im Sinne des Probability-Proportional-to-Size-Verfahrens Schulen (inkl. Ersatzschulen, die bei Absagen der ursprünglich gezogenen Schulen an die Reihe kamen) gezogen. Nach den Zusagen der Schulen und den Genehmigungen der Bildungsdirektionen aller neun Bundesländer wurde die Genehmigung der Erziehungsberechtigten eingeholt. Es erklärten 538 Schüler*innen ihre Bereitschaft an der Erhebung im April 2021 teilzunehmen, schlussendlich erhielten wir 455 bearbeitete Aufgabenhefte und 25 Lehrer*innenfragebögen der Lehrpersonen der getesteten Schulklassen zurück.

Die hier präsentierten Ergebnisse umfassen Mittelwerte, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten (nach Pearson) inklusive p-Werte.

6 Ergebnisse

Die Überzeugungen der an der Erhebung teilgenommen Mathematiklehrkräfte sind gemittelt in der Tab. 2 aufgelistet.

	Erstmat	Nach	Tech	Vor	Zeit	Active	Directive	K3	K4
m	2,17	2,25	2,05	2,06	4,04	1,50	3,67	2,52	4,00
s	0,78	0,62	0,81	0,65	0,73	0,44	0,35	1,36	1,44

Tab. 2 Mittelwerte (m) und Standardabweichungen (s) der einzelnen Kategorien der erhobenen Überzeugungen (Likert-Skala von 1 bis 5)

Die Ergebnisse zu den *technologiebezogenen Überzeugungen* werden zuerst angeführt. Zu Beginn wird die selbsteingeschätzte Technologieaffinität dargestellt. Hier beträgt der Mittelwert $m = 2{,}05$ [Tech] Es kann also behauptet werden, dass die Lehrkräfte sich im Durchschnitt eher als technologieaffin bezeichnen.

Wir betrachten nun Überzeugungen, die für einen Technologieeinsatz im Mathematikunterricht sprechen. In diesem Sinne eher zugestimmt wird bei Aussagen, dass Technologie *Entdeckendes Lernen* unterstützt als auch, dass mit Hilfe von Technologie viele Darstellungsformen genutzt werden können ($m = 2{,}06$, [Vor]). Ebenfalls in diese Kerbe schlägt der Mittelwert zu den Überzeugungen, dass der Einsatz von Technologie so viel Zeit kostet, dass sich die Einführung dieser gar nicht lohnt. Aussagen dazu werden eher abgelehnt ($m = 4{,}04$, [Zeit]).

Folgend sind nun Überzeugungen angeführt, die gegen einen Einsatz von Technologie gedeutet werden können. Die Lehrer*innen stimmen Aussagen, bei denen Technologie als eine Gefahr für das Beherrschen (händischer) Fertigkeiten darstellt, im Mittel eher zu. Das Verständnis betreffend sind die Lehrer*innen im Mittel davon überzeugt, dass Technologie zum unreflektierten Arbeiten verleitet ($m = 2{,}25$, [Nach]). In Bezug auf die unterrichtliche Vorgehensweise sind die Lehrkräfte durchschnittlich gesehen davon überzeugt, dass bei der Einführung in ein neues Thema auf Technologie verzichtet werden soll und erst wenn der Stoff hinreichend durchdrungen wurde, soll Technologie eingesetzt werden ($m = 2{,}17$, [Erstmat]).

Bei den Überzeugungen zum Lernen von Mathematik stimmen die Lehrpersonen Aussagen zu konstruktivistisch vermittelnden Methoden zu ($m = 1{,}50$, [Active]) und lehnen Aussagen zu lehrer*innengesteuerten Vermittlungen eher ab ($m = 3{,}67$, [Directive]), jeweils durchschnittlich gesehen.

Des Weiteren äußern sich die Lehrpersonen im Mittel eher für eine Verwendung eines gewöhnlichen (wissenschaftlichen) Taschenrechners bei Typ-1-Aufgaben im Rahmen der Reifeprüfung ($m = 2{,}52$, [K3]), während sie eher gegen die Verwendung höherwertiger Technologie bei Typ-1-Aufgaben sind ($m = 4{,}00$, [K4]).

Als nächstes wurden Korrelationen zwischen dem prozeduralen Wissen der Schüler*innen und den Überzeugungen ihrer jeweiligen Lehrkräfte betrachtet, siehe Tab. 3. Es fällt auf, dass nur eine einzige Korrelation signifikant ist ($r = 0{,}48$, [K3]): Je größer die Ablehnung der Lehrkraft zu der Aussage „Zur Lösung von Typ-1-Aufgaben soll auch zukünftig ein gewöhnlicher Taschenrechner (TI-30) erlaubt sein.“ ist, desto größer ist der prozedurale Score der Klasse dieser Lehrkraft. Die Korrelation bei K4 ist knapp nicht signifikant ($p = 0{,}06$), hier bezieht sich die Aussage auf den Einsatz höherwertiger Technologie bei Typ-1-Aufgaben. Bei keiner der erhobenen Kategorien zu *technologiebezogenen Überzeugungen* sowie bei keiner der erhobenen Kategorien zu Überzeugungen zum Lernen von Mathematik konnte ein signifikanter Zusammenhang zum prozeduralen Wissen gefunden werden.

	Erstmat	Nach	Tech	Vor	Zeit	Active	Directive	K3	K4
r	-0,25	-0,08	0,20	-0,04	-0,16	-0,21	-0,09	0,48	0,39
p	0,23	0,69	0,33	0,84	0,43	0,32	0,67	0,02	0,06

Tab. 3 Korrelationskoeffizienten (r) zwischen dem prozeduralen Wissen der Schüler*innen und den Überzeugungen der Lehrer*innen

Bei der Betrachtung der Korrelationen zwischen der Technologienutzungshäufigkeit und den bisher betrachten Überzeugungen finden sich vier signifikante Werte, siehe Tab. 4. Die Überzeugungen der Lehrkräfte zu ihrer Technologieaffinität korreliert mit der Technologienutzungshäufigkeit in allen Bereichen ([H1]: $r = 0{,}41$, [H2]: $r = 0{,}41$, [H3]: $r = 0{,}40$): Je höher die Technologieaffinität der Lehrperson von ihr selbst eingeschätzt wird, desto öfter verwendet die Lehrperson höherwertige Technologie im Unterricht bzw. desto öfter verwenden ihre Schüler*innen höherwertige Technologie im Unterricht bzw. desto öfter verwenden ihre Schüler*innen höherwertige Technologie bei der Hausübung. Die vierte signifikante Korrelation betrifft die Überzeugungen zur zeitlichen Komponente des Technologieeinsatzes ($r = -0{,}42$, [Zeit]): Je weniger die Lehrkraft Technologie als Zeitverschwendung sieht, desto häufiger verwendet sie diese im Unterricht.

	Erstmat	Nach	Tech	Vor	Zeit	Active	Directive	K3	K4
H1	-0,33	-0,04	**0,41**	0,22	**-0,42**	0,22	0,20	-0,04	-0,05
H2	-0,24	-0,12	**0,41**	0,10	-0,38	0,11	0,20	-0,10	0,10
H3	-0,28	-0,02	**0,40**	-0,12	-0,29	0,11	-0,06	-0,06	-0,06

Tab. 4 Korrelationskoeffizienten zwischen den Technologienutzungshäufigkeiten und den Überzeugungen der Lehrpersonen (fett gedruckte Parameter sind signifikant, $p < 0{,}05$)

7 Diskussion

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse aus Abschnitt 6 diskutiert und ihre Relevanz für den Einsatz technologischer Hilfsmittel im Mathematikunterricht herausgearbeitet werden.

Generell zeigt sich, dass die teilnehmenden Lehrkräfte eher technologieaffin sind, dass also eine prinzipielle Bereitschaft angenommen werden kann, Technologie auch im Unterricht einzusetzen. Die Daten der Studie OFF zeigen allerdings auch, dass dies im derzeitigen österreichischen Mathematikunterricht eher in bescheidenem Ausmaß zutrifft. Höherwertige Technologie wird demnach in Schul- und Hausübung nur etwa einmal pro Woche von Schüler*innen bzw. Lehrer*innen verwendet (Dorner & Ableitinger 2022). Die vorliegende Arbeit geht dieser Tatsache noch einmal genauer auf den Grund und untersucht Zusammenhänge mit diversen Überzeugungsdimensionen der Lehrpersonen.

Es überrascht in diesem Zusammenhang wenig, dass technologieaffinere Lehrkräfte tendenziell häufiger höherwertige Technologie verwenden bzw. durch ihre Schüler*innen verwenden lassen als wenig technologieaffine. Bemerkenswert ist allerdings, dass die meisten anderen getesteten Überzeugungsdimensionen zur Technologie keinen zusätzlichen Effekt in dieser Hinsicht zeigen. Gerade einmal die Überzeugung, dass Technologie im Unterricht keine Zeitverschwendung ist, korreliert signifikant mit der tatsächlichen Nutzungshäufigkeit.

Die Ergebnisse legen zudem offen, dass die befragten Lehrkräfte differenziert über den Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht nachdenken. Das bestätigt die Ergebnisse von Thurm et al. (2017). So wird der Technologie einerseits zugeschrieben, entdeckendes Lernen und die Nutzung verschiedener Darstellungsformen zu begünstigen, andererseits wird die Gefahr wahrgenommen, wonach Technologie zu unreflektiertem Arbeiten verleiten könnte bzw. das technologiefreie Rechnen zu sehr in den Hintergrund treten könnte. Insbesondere bei der Einführung in ein neues Thema solle auf Technologie verzichtet werden. Das zeigt eine gewisse Skepsis der Lehrkräfte der Technologie gegenüber, insbesondere auch bei ihrem Einsatz in semantischen, verständnisorientierten Unterrichtsphasen. Hier besteht ein eventueller Bedarf an geeigneten Fortbildungsmaßnahmen, die das Potenzial technologischer Hilfsmittel auch für die mathematische Begriffsbildung und den Aufbau geeigneter Vorstellungen sichtbar machen.

Ein zentrales Anliegen des vorliegenden Artikels ist zweifellos die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen diversen Überzeugungen der Lehrkräfte (zur Technologie und zum Lernen von Mathematik) und den prozeduralen Fähigkeiten ihrer Schüler*innen gibt. Interessanterweise konnten hier keine signifikanten Korrelationen gefunden werden. Das deutet darauf hin, dass sich die Überzeugungen der Lehrkräfte zwar vielleicht auf die Unterrichtsgestaltung (die Nutzungshäufigkeit korreliert mit der prinzipiellen Technologieaffinität, siehe oben; vgl. auch Reusser & Pauli 2014 und Bråten 2010), nicht aber auf den konkreten Output der operativen Fähigkeiten ihrer Schüler*innen durchschlagen. Interessanterweise konnte aber zumindest herausgefunden werden, dass die Ablehnung eines wissenschaftlichen Taschenrechners beim Lösen von Typ-1-Aufgaben mit dem prozeduralen Wissen der Schüler*innen doch recht deutlich korreliert. Hier ist also die Überzeugung zu einer ganz konkreten maturaspezifischen Fragestellung relevanter als eher allgemein gehaltene Formulierungen zum Einsatz von Technologie im Unterricht.

Zum Abschluss wollen wir auch noch Limitationen der Studie anführen. Die doch recht kleine Stichprobe ($n = 25$) aus Lehrkräften ist der Tatsache geschuldet, dass die vorliegende Studie Teil des größer angelegten Projekts OFF ist, bei dem die zugehörigen 25 Schulklassen als repräsentative Stichprobe verwendet wurden. Die fehlende Signifikanz einiger der Resultate könnte auf diesen Umstand zurückzuführen sein. Die Technologienutzungshäufigkeit wurde aus organisatorischen Gründen nicht direkt im Unterricht beobachtet und gemessen, sondern über Einschätzungen der Lehrkräfte bzw. ihrer Schüler*innen erhoben. Hier könnten Folgestudien ansetzen, in denen nicht nur die tatsächliche Nutzungsdauer, sondern auch die konkrete Art und Qualität der Nutzung erhoben wird. Auf diese Weise ließen sich differenziertere Aussagen über Zusammenhänge zwischen den Überzeugungen und der tatsächlichen Technologienutzung machen. Generell ist die Erhebung von *Beliefs* eine methodisch herausfordernde Aufgabe, die häufig über Fragebogen-items gelöst wird (Leder & Forgasz 2002). Diesem Ansatz sind wir aus forschungsmethodischen Gründen auch in der vorliegenden Studie gefolgt, wenngleich eine indirekte Erhebung der Überzeugungen dem möglichen Problem sozial erwünschter Antworten begegnet wäre.

Literatur

Ableitinger, C.; Dorner, C. (2023): Measuring Austrian students' procedural knowledge at the end of upper secondary level. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, published online. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2209093

Altieri, M. (2016): *Erfolg in Mathematikklausuren ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge unterbesonderer Berücksichtigung prozeduralen Wissens*. Dissertation, Technische Universität Dortmund. https://doi.org/10.17877/DE290R-17417

Bartok, L.; Steinfeld, J. (2015): *Stichprobenziehung. Ein Kommentar zur aktuellen und Vorschläge zur weiteren Vorgehensweise*. BIFIE.

Barzel, B. (2012): *Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann?* Münster: Waxmann.

Baumert, J.; Kunter, M. (2006): Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 9*(4), 469–520.

Bergqvist, E. (2007): Types of reasoning required in university exams in mathematics. In: *The Journal of Mathematical Behavior 26*(4), 348–370.

Bergsten, C.; Engelbrecht, J.; Kågesten, O. (2017): Conceptual and procedural approaches to mathematics in the engineering curriculum–comparing views of junior and senior engineering students in two countries. In: *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education 13*(3), 533–553.

Blömeke, S.; Kaiser, G.; Lehmann, R. (2010): TEDS-M 2008 Sekundarstufe I: Ziele, Untersuchungsanlage und zentrale Ergebnisse. In: Blömeke, S.; Kaiser, G.; Lehmann, R. (Hrsg.): *TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich* (S. 11-38). Münster [u.a.]: Waxmann.

Blömeke, S.; Suhl, U.; Döhrmann, M. (2012): Zusammenfügen was zusammengehört. Kompetenzprofile am Ende der Lehrerausbildung im internationalen Vergleich. In: *Zeitschrift für Pädagogik 58*(4), 422–440.

BMBWF (2022). *SRP Mathematik (AHS): 3-Stufen-Plan zur Weiterentwicklung des Mathematik-Unterrichts und der Mathematik-Matura.* https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4812&token=570ef569b2950dfbcc89d7633d94112dc1cc631c

BMBWF (2023a): *Masterplan für die Digitalisierung im Bildungswesen*. https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/zrp/dibi/mp.html

BMBWF (2023b): *Lehrplan Mathematik (Sekundarstufe I)*. https://www.paedagogikpaket.at/component/edocman/262-lehrplan-2/download.html?Itemid=0

Bråten, I. (2010): Personal epistemology in education: Concepts, issues, and implications. In: Baker, E.; McGaw, B.; Peterson, P. (Hrsg.): *International Encyclopedia of Education*. Oxford: Elsevier.

Doerr, H. M.; Zangor, R. (2000): Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. In: *Educational Studies in Mathematics 41*, 143–163.

Dorner, C.; Ableitinger, C. (2022): Procedural mathematical knowledge and use of technology by senior high school students. In: *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education 18*(12), em2202.

Drijvers, P.; Ball, L.; Barzel, B.; Heid, M. K.; Cao, Y.; Maschietto, M. (2016): *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. Cham: Springer.

Drijvers, P.; Doorman, M.; Boon, P., Reed, H.; Gravemeijer, K. (2010): The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. In: *Educational Studies in Mathematics 75*(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Engelbrecht, J.; Bergsten, C.; Kågesten, O. (2009): Undergraduate students' preference for procedural to conceptual solutions to mathematical problems. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 40*(7), 927–940.

Handal, B.; Cavanagh, M.; Wood, L.; Petocz, P. (2011): Factors leading to the adoption of a learning technology: The case of graphics calculators. In: *Australasian Journal of Educational Technology 27*(2), 343–360.

Heintz, G.; Elschenbroich, H.-J.; Laakmann, H.; Schacht, F.; Schmidt, R. (2014): Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht. In: Roth, J.; Ames, J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag.

Heinze, A.; Neumann, I.; Ufer, S.; Rach, S.; Borowski, A.; Buschhüter, D.; Greefrath, G.; Halverscheid, S.; Kürten, R.; Pustelnik, K.; Sommerhoff, D. (2019): Mathematische Kenntnisse in der Studieneingangsphase – Was messen unsere Tests? In: Frank, A.; Krauss, S.; Binder, K. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 345–348). Münster: WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-20862

Hiebert, J.; Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: Hiebert, J. (Hrsg.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1–27). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hofer, B.; Pintrich, P. R. (1997): The Development of Epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning. In: *Review of Educational Research 67*(1), 88–140.

Ingelmann, M. (2009): *Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I*. Berlin: Logos-Verlag.

Kieran, C.; Drijvers, P. (2006): The Co-Emergence of Machine Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of CAS use in Secondary School Algebra. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning 11*(2), 205–263.

KMK (2009): *Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaft-lichtechnischen Bildung (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.05.2009)*.

KMK (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*.

Laschke, C.; Schmotz, C. (2014): Erfassung der Überzeugungen der angehenden Sekundarstufen-I-Lehrkräfte. In: Laschke, C.; Blömeke, S. (Hrsg.): *Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics (TEDS-M 2008). Dokumentation der Erhebungsinstrumente* (S. 325–346). Münster: Waxmann Verlag.

Leder, G. C.; Forgasz, H. J. (2002): Measuring Mathematical Beliefs and Their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach. In: Leder, G.C.; Pehkonen, E.; Törner, G. (Hrsg.): *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 95–113). Dordrecht: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47958-3_6

Matyas, K.; Drmota, M. (2018): Das "M" in MINT: TU Wien beobachtet Absinken der Mathematikkenntnisse von Studienanfänger_innen. *Offener Brief an Bundesminister Heinz Faßmann.* https://www.tuwien.at/ tu-wien/aktuelles/news/news/das-m-in-mint-tu-wien-beobachtet-absinken-der-mathematikkenntnisse-von-studienanfaenger-innen

Neubrand, M.(2013): PISA mathematics in Germany: Extending the conceptual framework to enable a more differentiated assessment. In: Prenzel M.; Kobarg M.; Schöps K.; Rönnebeck S. (Hrsg.): *Research on PISA – research outcomes of the PISA research conference 2009* (S. 39–49). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4458-5_3

Neubrand, M.; Klieme, E.; Lüdtke, O.; Neubrand, J. (2002): Kompetenzstufen und Schwierigkeits-modelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: *Zeitschrift für Lernforschung 30*(1), 100–119. https://doi.org/10.17877/DE290R-7152

Oser, F.; Blömeke, S. (2012): Überzeugungen von Lehrpersonen. Einführung in den Thementeil. In: *Zeitschrift für Pädagogik 58*(4), 415–421

Peterson, P. L.; Fennema, E.; Carpenter, T.; Loef, M. (1989): Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. In: *Cognition and Instruction 6*(1), 1–40.

Philipp, R. A. (2007): Mathematics teachers' beliefs and affect. In: F. K. Lester (Hrsg.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Bd. 1, S. 257–315). Charlotte: IAP.

Reusser, K.; Pauli, C. (2014): Berufsbezogene Überzeugungen von Lehrerinnen und Lehrern. In: Terhart, E.; Bennewitz, H.; Rothland, M. (Hrsg.): *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 642–661). Münster: Waxmann Verlag.

Rittle-Johnson, B.; Star, J. R.; Durkin, K. (2012): Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? In: *British Journal of Educational Psychology 82*(3), 436–455.

Thurm, D.; Klinger, M.; Barzel, B.; Rögler, P. (2017): Überzeugungen zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht: Entwicklung eines Messinstruments für Lehramtsstudierende und Lehrkräfte. In: *mathematica didactica 40*(1), 19–36.

Wynands, A. (1984): Rechenfertigkeit und Taschenrechner. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 5*(1), 3–32. https://doi.org/10.1007/BF03339239

Verfasser

Christoph Ableitinger
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
1090 Wien
`christoph.ableitinger@univie.ac.at`

Christian Dorner
Pädagogische Hochschule Steiermark
Institut für Sekundarstufe Allgemeinbildung
Hasnerplatz 12
8010 Graz
`christian.dorner@phst.at`

Die Rolle der Wahrscheinlichkeit für das Verständnis beurteilender Statistik

MANFRED BOROVCNIK, KLAGENFURT

Wahrscheinlichkeit ist die Grundlage für Entscheidungen bei Ungewissheit. Mit dem Zugang zur Computertechnologie ist Simulation zum vorherrschenden Lehransatz geworden. Obwohl Simulation ihre Vorteile hat, reduziert dieser Ansatz Konzepte auf ihren frequentistischen Teil. Das trifft nicht nur auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst zu, sondern auch und gerade auf die beurteilende Statistik. Dies gipfelt in einem Ansatz der so genannten Informellen Inferenz, der (bedingte) Wahrscheinlichkeit überflüssig macht. Die Eigenschaften beurteilender Statistik setzen jedoch voraus, dass sich im kognitiven System des Einzelnen ein umfassendes Konzept von Wahrscheinlichkeit herausbildet. Wir entwickeln dazu fünf Säulen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Ziel ist, verschiedene Bedeutungen der Wahrscheinlichkeit miteinander zu verknüpfen, Wahrscheinlichkeit mit beurteilender Statistik zu verbinden und nachhaltige Intuitionen für Wahrscheinlichkeit und Denkweisen der beurteilenden Statistik zu schaffen.

1. Einleitung

Die Wahrscheinlichkeit ist die Grundlage für intelligente Handlungen und Entscheidungen angesichts von Ungewissheit. Dazu gehören statistische Schlussfolgerungen ebenso wie Überlegungen zu Zuverlässigkeit, Risiko und Entscheidungsfindung. Die Lehrpläne haben den Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit die Natur von Wahrscheinlichkeit verengt. Mit den neuen Technologien ist die Simulation zum vorherrschenden Lehransatz geworden. Obwohl Simulation eine wirksame Methode ist, um komplizierte Mathematik zu ersetzen, reduziert sie Konzepte auf ihren frequentistischen Anteil. Dies gipfelt in einem Ansatz zur Informellen Inferenz, der Wahrscheinlichkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit überflüssig macht, um statistische Beurteilung zu unterrichten. Die relevanten Eigenschaften statistischer Inferenz erfordern jedoch, dass sich im kognitiven System des Einzelnen eine tragfähige Vorstellung von Wahrscheinlichkeit herausbildet.

1.1 Die fünf Säulen für ein erweitertes Verständnis von Wahrscheinlichkeit

Im ersten inhaltlichen Abschnitt werden fünf Säulen S_1–S_5 für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit für die Statistik aufgebaut und ihre Bedeutung für ein umfassendes Verständnis des gesamten Themenkomplexes erklärt.

Man soll mit der Unterweisung in Wahrscheinlichkeit so früh wie nur möglich beginnen (S_1). Der Grund ist einfach: Die Vorstellungswelt der Individuen ist so bizarr und idiosynkratisch, die Begriffe sind so komplex, dass es wichtig erscheint, einen Prozess der Reifung und Adaptierung des Wechselspiels von Intuition und Mathematik in Gang zu bringen, der erst viele Entwicklungsstufen durchlaufen muss. Damit sich Anlässe für Entwicklung im kognitiven System der Kinder tatsächlich auftun, sollte man Spiele auf intelligente Weise nutzen (S_2). Erst Problemeinsichten und die Konfrontation mit Sackgassen der eigenen Vorstellungen führt zur Weiterentwicklung der Gedanken und zum Ausbau von Strategien. Dabei ist es von Vorteil, die Begriffswelt viel weiter abzustecken als es durch einen reinen auf Häufigkeiten reduzierten Wahrscheinlichkeitsbegriff möglich ist, auch wenn man natürlich auf illustrierende Simulationen zurückgreifen wird. Die Devise lautet daher: Forme Bayesianisches und risiko-orientiertes Denken (S_3), das auch für Einzelentscheidungen taugliche Vorstellungen liefert und über das artifizielle Szenario einer Untersuchung der Entscheidungen auf lange Sicht weit hinausgeht. Dazu ist es von Vorteil, Fragen der Wahrscheinlichkeit von Anfang an mit Sichtweisen der beurteilenden Statistik zu verknüpfen (S_4) und die enge Verwandtschaft zwischen Wahrscheinlichkeit und Risiko (S_5) offenzulegen und für das individuelle Verständnis auszunützen.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S. 15 - 30.

Die fünf Säulen für die Unterweisung in Wahrscheinlichkeit dienen zweierlei: Erstens sollen die Bemühungen in Didaktik und Unterricht strukturiert und der vielfältige Begriff Wahrscheinlichkeit und dessen Zweck geklärt werden. Zweitens sollen die fünf Säulen dazu beitragen, die Schwierigkeiten im Zugang zur beurteilenden Statistik zu lösen. Dazu sollen die verschiedenen Deutungen von Wahrscheinlichkeit miteinander verbunden und Wahrscheinlichkeit und statistische Beurteilung in Abstimmung aufeinander entwickelt werden. Insgesamt geht es darum, nachhaltige Intuitionen aufzubauen, die helfen, Gelerntes zu verstehen und zu behalten.

1.2 Statistische Inferenz mittels bedingter Wahrscheinlichkeit verstehen lernen

Im zweiten inhaltlichen Abschnitt geht es um die frühzeitige Einbindung statistischer Inferenz in die Entwicklung wahrscheinlichkeitstheoretischer Fragestellungen. Dabei dreht sich alles um das Begriffsfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit, das im üblichen Zugang eine eher untergeordnete Rolle spielt. Wir bereiten fünf Begriffsfelder BF_1–BF_5 mit begrifflichen Querverbindungen vor, die statistische Inferenz verstehen lassen sollen.

Statistische Inferenz mittels der bedingten Wahrscheinlichkeit verstehen lernen (BF_1). Bei allen statistischen Tests gibt es Entscheidungs- bzw. Gütekriterien, die eigentlich bedingte Wahrscheinlichkeiten sind. Viele Probleme entstehen dadurch, dass man geneigt ist, die Bedingungen wegzulassen und sie als unbedingte (absolute) Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren. Das zweite Feld, über das wir ein tieferes Verstehen von statistischer Inferenz ermöglichen wollen, ist die Deutung der Situation in der Bayes-Formel als statistischer Test. Bei dieser Analogie wird besonders deutlich, dass die a priori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese üblicherweise fehlt (BF_2). Nicht nur, dass man dadurch die eigentlich interessierenden (bedingten) Wahrscheinlichkeiten einer Fehlentscheidung nur über diese a priori-Wahrscheinlichkeit berechnen kann, es wird auch klar, dass die übliche statistische Inferenz Ersatzprobleme löst, welche uninteressant sind. Aus einer kurzen Besprechung der Fisher-Neyman-Kontroverse (BF_3) kann man sehr viel lernen, wie statistische Entscheidungen begründet werden und ob dies auch sinnvoll ist.

Insbesondere geht es dabei um das Risiko von Fehlentscheidungen bei wiederholter Anwendung, das heißt, um eine Interpretation der entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten auf lange Sicht (BF_4). Diesem Konstrukt, die Qualität eines statistischen Tests durch sein Verhalten im oftmals wiederholten Einsatz zu beschreiben, steht aber in der Praxis die Einzelfallentscheidung gegenüber, für welche die verwendeten Qualitätskriterien wenig Sinn haben. Schließlich geht es um eine Analogie zwischen Medizin und statistischen Tests (BF_5), welche den Einzelfall und Entscheidungen auf lange Sicht besonders krass gegenüberstellt und damit nicht nur Fragen in der Medizin durch statistische Inferenz klären, sondern auch statistische Inferenz über den Kontext der Medizin besser verstehen lässt.

Zur Analogie zwischen Medizin und statistischer Inferenz wird eigens ein Beispiel erörtert, das die Schlüsselbegriffe bedingte Wahrscheinlichkeit und a priori-Wahrscheinlichkeit als Kernbegriffe für das Verständnis statistischer Inferenz ausweist. Gleichzeitig werden dabei alle Deutungen von Wahrscheinlichkeit in einem Beispiel schlagend und somit der Wahrscheinlichkeitsbegriff abgerundet.

2. Fünf Säulen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit für die Statistik

Wir bauen den Begriff der Wahrscheinlichkeit und insbesondere den der bedingten Wahrscheinlichkeit sorgfältig auf, um damit eine umfassendere Konzeption statistischer Beurteilung zu ermöglichen. Dazu scheint es wichtig zu sein, den Wahrscheinlichkeitsbegriff aus verschiedensten Perspektiven zu betrachten, damit sich seine Konstituenten im Rahmen verwandter Begriffe entwickeln und somit im kognitiven Netz der Lernenden verankert werden können.

2.1 Wahrscheinlichkeit und statistische Beurteilung miteinander verknüpfen

Es geht darum, den Zweck der Begriffe offenzulegen und damit die Begründung der Vorgangsweise und die Natur der Begriffe verstehen zu lassen. Auf die fünf Säulen bezogen bedeutet das für jegliche didaktische Arbeit an der Stochastik folgendes:

Auf der reichen Erfahrung aus Spielen aus Kindheit und Jugend aufbauen, um zuverlässige Intuitionen zu entwickeln (S_1 und S_2). Die subjektivistische (im Folgenden auch als epistemisch benannte) Konnotation von Wahrscheinlichkeit miteinbeziehen, um spätere Verwirrung zu vermeiden und die Anwendungen zu erweitern (S_3). Mit Fragen der beurteilenden Statistik in den frühesten Phasen des Unterrichts in Wahrscheinlichkeit verknüpfen, weil es sich um komplementäre Teile desselben handelt (S_4). Wahrscheinlichkeit und Risiko als Zwillingsbegriffe entwickeln (S_5).

Das umschließt auch, die Kontroverse in den Grundlagen („Sind klassische oder Bayesianische Methoden besser?“) für einen pluralistischen Hintergrund nützen statt Methoden zu reduzieren sowie den Blickwinkel auf Intuitionen und Common Sense schärfen. Bedingte Wahrscheinlichkeit wird sich dabei als der Schlüssel zu einer breiteren Interpretation der Inferenz erweisen.

Probabilistische Literalität bezieht sich nicht nur auf die Fähigkeit einschlägige Methoden zielsicher anzuwenden, sondern auch auf eine gewisse Gewandtheit in probabilistischen Fragen, so etwa nicht nur im Rahmen des Lottos die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer mit bzw. ohne Zusatzzahl oder einen Sechser berechnen zu können und dies bewusst auf die Gleichwahrscheinlichkeit der Ziehung aller verbleibenden Zahlen auf jeder Stufe des Experiments zu beziehen. Nein, die Gewandtheit bezieht sich auch darauf, zu erkennen, was genau die Attraktivität des Lottos ausmacht und warum man etwa den Fünfer mit Zusatzzahl als Gewinnmöglichkeit eingeführt hat.

Verständnisschwierigkeiten zur Wahrscheinlichkeit sind notorisch, bei statistischen Schlussfolgerungen *und* der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine beliebte Intervention im Unterricht besteht darin zu vereinfachen – siehe aber Brousseaus „glissement didactique“ (Brousseau, 1984). Wenn die Begriffe zu stark elementarisiert werden, verlieren sie ihren ursprünglichen Charakter vollständig und entarten zu einem Torso. Eine innovative Reaktion auf diese bekannten Schwierigkeiten besteht darin, Wahrscheinlichkeit mit Fragen statistischer Inferenz zu verknüpfen, sowie die *Begriffe zu erweitern statt ihren theoretischen Rahmen einzuschränken*. Wahrscheinlichkeit ist nämlich viel mehr als nur relative Häufigkeiten und hat eher einen metaphorischen (Spiegelhalter, 2014) als materiellen Charakter.

2.2 Die fünf Säulen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Detail

Bei allen fünf im Folgenden besprochenen Säulen geht es um die Offenlegung des Zwecks von Wahrscheinlichkeit. Dazu wird das Repertoire der historisch entwickelten Begrifflichkeiten angesprochen. Im Gegensatz zu didaktischen Bestrebungen zur Vereinfachung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu etwas wie relative Häufigkeit geht es uns um die Vielfalt des Begriffsfeldes, weil erst diese ein umfassenderes Verständnis des Potentials *und* der Grenzen ermöglicht.

S_1: Beginne mit Wahrscheinlichkeit sehr früh und entwickle die Ideen spiralförmig

So früh wie nur irgendwie möglich. Die Ideen brauchen eine lange Zeit zur Reifung und die intuitiven Widersprüche sind hartnäckig. Die Ideen müssen mit den beginnenden Konzepten konfrontiert werden und es muss eine Art Wettbewerb entstehen. Nur so wird das Verständnis bei den Kindern nachhaltig fundiert werden können. Sie müssen erst langsam verstehen lernen, welche ihrer Vorstellungen für welche Fragestellungen zielführend sind und welche „Versprechen“ der Konzepte ernst zu nehmen sind und wie das Kleingedruckte in den „didaktischen Verträgen“ aufzufassen ist.

Varga (1983) untersuchte mit 9-Jährigen das Verhalten des Zufalls in Bezug auf Runs von Kopf und Zahl bei Münzwürfen. Nicht um zu untersuchen, wie sich relative Häufigkeiten und singuläre Muster entwickeln. Sondern um zu beurteilen, ob ein bestimmtes Münzwurfprotokoll echt oder „erfunden" ist. Diese Aufgabe stellt die Kinder schon zu Beginn des Unterrichts in Wahrscheinlichkeit in den Mittelpunkt von Überlegungen zur statistischen Beurteilung. Sie wissen noch gar nicht, was Wahrscheinlichkeit ist und was deren Konsequenzen sind, und dennoch sollen sie eine Entscheidung darüber fällen, ob eine vorgelegte Serie von „Münzwürfen" authentisch ist. Es gilt, den Zweck von Wahrscheinlichkeit sichtbar zu machen: Entscheidungen zu treffen und eine statistische Beurteilung von Möglichkeiten abzugeben. In beiden Situationen geht es um Risiko und Formen, mit Unsicherheit umzugehen. Es geht darum, Wahrscheinlichkeit in Spielen sichtbar und relevant werden zu lassen. Es geht auch darum, den Kindern Zeit zu geben, dass in ihnen Begrifflichkeiten wachsen und sie ihre Vorstellungen abändern und den Gegebenheiten anpassen können.

> "Vertrautheit mit kombinatorischem Denken lässt [...] Hypothesentests [...] machbar werden. [...] Man kann Testen von Hypothesen darauf aufbauen. [...] es ist didaktisch sinnvoll, [...] statistische Tests […] über Kombinatorik […] zu erschließen" (Fejes-Tóth et al., 2022, S. 5).

S_2: Nutze Spiele auf intelligente Weise, um nachhaltige probabilistische Intuitionen aufzubauen

Man setze Glücksspiele nicht routinemäßig, sondern auf intelligente Weise ein, so wie es Varga (1983) getan hat. Spiele sind nützlich, um Verbindungen zwischen den zentralen Bedeutungen von Wahrscheinlichkeit herzustellen: die klassische Interpretation von Proportionen als Gewichtung der Tendenz, Ergebnisse zu produzieren – ex ante; die frequentistische Bedeutung von Wahrscheinlichkeit als ein Maß für den Zufall – ex post; Verhältnisse von Chancen und Einsätzen zur Kalibrierung der subjektivistischen (epistemischen) Wahrscheinlichkeit. Man nutze Spiele auf intelligente Weise, um Deutungen von Wahrscheinlichkeit durch Aufgaben unter inferenziellem Blickwinkel miteinander zu verbinden. Die Interpretationen von Wahrscheinlichkeit haben je ihre eigenen Voraussetzungen.

- Gleichwahrscheinliche Elementarereignisse.
- Unabhängig voneinander unter gleichen Bedingungen wiederholbare Experimente.
- Ein rationales System von Präferenzen für eine Person.

Steinbring (1991) verweist auf eine Komplementarität zwischen den Konzepten der Gleichwahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit als etwas wie eine relative Häufigkeit. Er unterstreicht, dass eine Konzeption von Wahrscheinlichkeit beide Aspekte erfordert. Die Wechselwirkung zwischen der auf gleichwahrscheinlichen Fällen beruhenden Wahrscheinlichkeit und der Entwicklung relativer Häufigkeiten führt zu Fragen der statistischen Inferenz. Man nutze Spiele auf intelligente Weise, um Intuitionen einem Praxistest zu unterwerfen und sie so zu erweitern oder revidieren. Interessanterweise wird bei statistischer Inferenz in der Regel von der Unabhängigkeit einzelner Spiele ausgegangen und es werden keinerlei Muster untersucht. Die Untersuchung solcher Muster wäre ja sinnlos, da der Zufall bedeutet, dass alles passieren kann. Es handelt sich um eine *wechselweise* Abhängigkeit: Fragen der statistischen Inferenz sind Schlüssel zu einem guten Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ein angemessenes Konzept der Wahrscheinlichkeit ist der Schlüssel zum Verständnis statistischer Schlussfolgerungen. Das Spiel integriert relative Risiken und die Messung des Grads des Vertrauens.

S_3: Forme Bayesianisches und risiko-orientiertes Denken so früh wie möglich

Bayesianische Ideen beziehen sich auf intuitives Denken und Common Sense; sie stellen bedingte Wahrscheinlichkeit in den Mittelpunkt und berücksichtigen, welche Folgen (Kosten) eines ungewissen Ereignisses zu beachten sind. Carranza und Kuzniak (2008) weisen auf die problematische Natur der bedingten Wahrscheinlichkeit hin; sie sensibilisieren für Probleme, welche auf die Vernachlässigung der subjektivistischen Auslegung von Wahrscheinlichkeit zurückzuführen sind. Ein qualitatives Urteil über eine Wahrscheinlichkeit basiert auf dem Präferenzsystem einer Person und ist daher ein mathematischer Ausdruck dieser Präferenzen. Ein derartiges qualitatives Urteil über die Wahrscheinlichkeit einer Aussage wird aber oft dahingehend missverstanden, dass es sich um einen willkürlichen Wahrscheinlichkeitswert handelt. Der wesentliche „Unterschied“ zu anderen Bedeutungen von Wahrscheinlichkeit besteht darin, dass in der gängigen Vorstellung das Urteil einer Person subjektiv (oder sogar willkürlich) sein „muss“, während die Eigenschaft eines Prozesses oder Geräts dagegen „objektiv“ (wissenschaftlich und unbestreitbar) wäre. Das Urteil eines Menschen muss jedoch auf qualitativen *Kenntnissen* beruhen und ist daher keineswegs willkürlich. Ein wesentlicher Aspekt des „Forme Bayesianisches und risiko-orientiertes Denken“ ist daher zu vermitteln, dass gilt:

$$\text{subjektivistisch} = \text{epistemisch} \neq \text{beliebig}$$

Was die Diskussion über Bayes-Methoden im Unterricht anbelangt, so bietet eine aufschlussreiche Artikelsammlung im Teachers‘ Corner des *American Statistician* (Witmer et al, 1997) mit Grundsatzartikeln, hitzigen Diskussionsbeiträgen und Antworten der Autoren die Erkenntnis, dass es unterschiedliche Interpretationen von Wahrscheinlichkeit gibt, die alle ihre Rechtfertigung durch eine axiomatische Theorie finden und dass die Bayes-Formel der Schlüssel zu jedem statistischen Verfahren der Inferenz ist. Das Verständnis statistischer Schlussfolgerungen erfordert demnach eine gute Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeit und ein ausgewogenes Konzept der Wahrscheinlichkeit. Dies schließt sowohl die Gleichwahrscheinlichkeit als auch die frequentistische *und* die subjektivistische Auslegung von Wahrscheinlichkeit ein. Moore hat allerdings diese Diskussion apodiktisch für beendet erklärt statt Gegenargumente zu formulieren, indem er feststellte, dass Bayes-Methoden und der gesamte Standpunkt der subjektivistisch-epistemischen Wahrscheinlichkeit zu schwierig selbst für die Einführungsvorlesungen an der Universität seien. Wenn man der Kritik von Carranza und Kuzniak (2008) folgt, kommt man aber zur Einsicht, dass man nicht umhinkommt, Bayesianisches und risiko-orientiertes Denken zu formen, um beurteilende Statistik verstehen zu lassen. Bayes-Methoden sind einfach nützlich, um die berüchtigten Fehlinterpretationen der statistischen Inferenz zu vermeiden:

> „Der Student [...] kann das Signifikanzniveau nur deshalb […] falsch interpretieren, weil er nichts über eine Bayesianische Alternative zum Signifikanztest gelernt hat“ (Diepgen, 1992).

Bayesianische Probleme verknüpfen auf natürliche Weise Wahrscheinlichkeit mit Risiko. Das Risiko überlappt mit persönlichen Überzeugungen über Methoden und dem jeweiligen Kontext bzw. der individuellen Auffassung darüber. Vancsó (2009) geht den Weg der parallelen Einführung in klassische und Bayesianische statistische Methoden, weil nur so beide für sich verstanden werden können. Es handelt sich um ein typisches Zwillingspaar von Begriffen, welche komplementären Charakter haben. Man kann sie nicht voneinander trennen ohne dass man einen substantiellen Sinnverlust verursacht. Wir gehen noch weiter, indem wir festhalten, dass diese Parallelität bereits in der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgegriffen werden muss, um diesen Bedeutungsverlust zu vermeiden.

S_4: Verknüpfe Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik von der Einführung an

Eine Schätzung der unbekannten Wahrscheinlichkeit ist erforderlich für Spiele mit unbekannter Struktur sowie für allgemeine Zufallsprozesse (die über Glücksspiele hinausgehen). Eine solche Schätzung erfordert eine frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit. Um die Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und relativen Häufigkeiten zu klären, wird schon im Anfangsunterricht viel Wert auf ein geeignetes Verständnis des empirischen Gesetzes der großen Zahlen gelegt. Allerdings mit ungeeignetem Blickwinkel auf die *Konvergenz* der relativen Häufigkeiten. Vielmehr sollte man den Zusammenhang mit Fragen der statistischen Inferenz ausbreiten und nutzen. Die Schätzung oder Beurteilung von Hypothesen für unbekannte Wahrscheinlichkeiten wirft folgende Fragen auf:

- Welcher Wahrscheinlichkeitswert ist für ein untersuchtes Ereignis gerechtfertigt?
- Wie kann man behaupten, über genügend Daten zu verfügen, damit eine empirische Wahrscheinlichkeitsschätzung gut genug ist?

Diese Fragen verbinden die Wahrscheinlichkeit notwendigerweise mit statistischer Inferenz. Auf diese Weise wird deutlich, dass Inferenz den Fokus auf weitere Interpretationen der Wahrscheinlichkeit lenkt, wenn man diese Fragen klären will. Die Verknüpfung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik geht weit über Spiele hinaus und führt direkt in die Bayes-Kontroverse über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeit. Für statistische Inferenz ist es zu wenig, von Gleichwahrscheinlichkeit zu einer frequentistischen Konzeption von Wahrscheinlichkeit überzugehen:

- Um entscheidende Fehler zu vermeiden, musste man eine subjektivistische Konnotation akzeptieren – oder diese Fehler billigend in Kauf nehmen (Hacking, 1965).
- Die Kontroverse in den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1930-80er Jahre) spiegelt sich in dem Dilemma wider, das Carranza und Kuzniak (2008) für den Unterricht feststellen.

Neben der Debatte darüber, welche Interpretation von Wahrscheinlichkeit die bessere ist, wurde es dringend notwendig, die Komplexität von statistischer Inferenz zu reduzieren, um sie unterrichten zu können. Um diese Reduktion der Komplexität zu erreichen, schlug Cobb (2007) vor, die statistische Inferenz vollständig durch Resampling zu ersetzen. So wurde ein Ansatz entwickelt, der als informelle (simulationsbasierte) Inferenz bezeichnet wird. Diese so genannte *Informelle Inferenz* reduziert den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf seinen frequentistischen Aspekt und macht Wahrscheinlichkeit eigentlich überflüssig, da alles durch Simulation gelöst wird, indem die Daten gemischt und dann einige zufällig ausgewählt werden, wobei dieser Prozess viele Male wiederholt wird.

Batanero und Borovcnik (2016) dagegen konzentrieren sich auf Szenarien, die in einen Kontext eingebettet sind, der die Komplexität auf natürliche Weise reduziert und eine intuitiv zugängliche Deutung für die beteiligten Konzepte hat. Freilich kann zur Veranschaulichung der Eigenschaften auch Simulation verwendet werden. Die Auffassung von Qualitätsindizes für statistische Tests als bedingte Wahrscheinlichkeiten wird durch den Szenario-Ansatz von Batanero und Borovcnik (2016) untermauert; dagegen werden diese Indizes im Rahmen der Informellen Inferenz zu absoluten (also nicht-bedingten) Wahrscheinlichkeiten degeneriert. Eine Kritik an der Informellen Inferenz – nicht alle Indizes können in diesem Ansatz berücksichtigt werden – findet man in Borovcnik (2021a). Der Szenario-Ansatz extrahiert eine natürliche Interpretation von Konzepten aus dem Kontext.

S_5: Entwickle die enge Verwandtschaft zwischen Wahrscheinlichkeit und Risiko

Details zu psychologischen Fragen, die im Kern von Missverständnissen von Wahrscheinlichkeitsaussagen stehen, finden sich in Borovcnik (2016) sowie in Borovcnik und Kapadia (2018). Die Verquickung zwischen Wahrscheinlichkeit und Risiko kann man am besten durch den Begriff der Komplementarität beschreiben. Damit meint man in der Didaktik, in Anlehnung an den Gebrauch der Komplementarität in der Physik die Unmöglichkeit, Begriffe voneinander zu trennen ohne ihren Bedeutungsgehalt zu zerstören.

Definition von Risiko. Wahrscheinlichkeit und Risiko haben sich im Gleichschritt entwickelt, was ihre Abgrenzung voneinander erschwert. In der Literatur werden uneinheitliche Begriffe verwendet (Borovcnik & Kapadia, 2018). Die Frage ist, was Risiko eigentlich umfassen sollte:
(1) die Wahrscheinlichkeit eines „unerwünschten“ Ereignisses und dessen Auswirkungen (Kosten),
(2) oder nur die Wahrscheinlichkeit des unerwünschten Ergebnisses,
(3) oder nur die Auswirkungen (Kosten, Nutzen),
(4) oder ob sich das Risiko indirekt auf die Faktoren im Hintergrund – Hazards genannt – bezieht, die potenziell das unerwünschte Ergebnis „verursachen“.

Kleine Wahrscheinlichkeiten bzw. kleine Risiken. Ein ganz besonderer Fall ergibt sich, wenn die beteiligten Wahrscheinlichkeiten sehr klein sind, was im Zusammenhang mit Risiken sehr oft der Fall ist. Wenn nämlich Wahrscheinlichkeiten oder Risiken sehr gering, die Auswirkungen aber sehr groß sind, neigen Menschen dazu, die geringe Wahrscheinlichkeit zu ignorieren und ihre Entscheidungen ausschließlich auf den potenziellen Nutzen oder Schaden zu stützen.

- *Aus diesem Grund spielen Menschen im Lotto*. Sie glauben an das Urteil Gottes oder erwarten Gottes Unterstützung, um im Lotto zu gewinnen.
- *Deshalb schließen Menschen fast jede Versicherung ab*. Sie scheinen zu glauben, dass sie durch eine Versicherung über den finanziellen Verlust hinaus persönlichen Schaden vermeiden können.

Im Hinblick auf sehr kleine Wahrscheinlichkeiten ist bedauerlich, dass diese selbst unter Laborbedingungen (Simulation) nicht wirklich geschätzt werden können. Ein reales Beispiel dazu ist das Auftreten von BSE (Bovine spongiforme Enzephalopathie) am Anfang dieses Jahrhunderts; es kann sein, dass alle Rinder, die in Deutschland positiv getestet wurden, falsch-positiv waren (also kein BSE hatten). Das hat seinen Hintergrund darin, dass die Prävalenz von BSE extrem klein und zudem unbekannt ist (siehe Dubben und Beck-Bornholdt, 2010).

Wie sehr die Schätzung einer Wahrscheinlichkeit von 0.0001 mittels eines Simulationsszenarios schwankt, selbst wenn man über 10000 Daten verfügt (und wann verfügt man über so viele – zufällige – Daten?), zeigt Borovcnik (2022). Diese kleinen Wahrscheinlichkeiten sind Modellgrößen, die anderweitig – durch Modellannahmen – begründet werden müssen. In der Vergangenheit wurde hierfür auch das Konzept einer *moralischen Wahrscheinlichkeit* in Betracht gezogen. Dabei geht es um eine Schranke, unterhalb derer alle Wahrscheinlichkeiten auf Null zu setzen sind. Für den Schwellenwert wurde eine Größenordnung von 10^{-4} diskutiert. Moderne Anwendungen mit Risiken beginnen erst weit unterhalb dieser Schwelle und sind im Sinne der moralischen Wahrscheinlichkeit fragwürdig.

Vergleich von Risiken statt Messung von Risiken. Wir haben eben das Problem der zuverlässigen Schätzung von kleinen Risiken erörtert. Modelliert man eine Prüfung bestehend aus n = 30 Single-Choice Items durch verschiedene Werte von p für das “Potential“ des Prüflings, so erkennt man rasch, dass man weit über 50% Lösungskapazität für ein einzelnes Item haben muss, damit man das Risiko durchzufallen entsprechend klein hält. Selbst bei p = 66% für einzelne Items besteht noch immer ein Risiko von 5.1% durchzufallen. Will man dieses Risiko weiter verkleinern, so steigt die erforderliche Kapazität extrem an. Borovcnik (2022, S. 3) resümiert dazu:

> „Um Risiken zu verringern, bedarf es enormer Anstrengungen. Wir konnten in den letzten Jahren sehen, wie schwierig sich öffentliche Maßnahmen im Zusammenhang mit der Pandemie gestalteten, weil man Risiken immer weiter verkleinern wollte. […], insbesondere kleine Wahrscheinlichkeiten können nicht numerisch interpretiert werden, sie können höchstens verglichen werden im Sinne von ‚ist kleiner‘. Kleine Wahrscheinlichkeiten sind […] ordinal.“

Es ergibt sich daraus die Notwendigkeit einer qualitativen Deutung anstelle der Interpretation der tatsächlichen Größe des Risikos im Sinne der damit verbundenen Wahrscheinlichkeit.

Konstituenten von Entscheidungssituationen, die über die Mathematik hinausgehen.

a) *Typen von Risiko*. Direkte, persönliche Risiken, virtuelle, auf Zukunft bezogene Risiken, gesellschaftliche Risiken, welche eine gemeinsame Evaluation unmöglich machen. Der Typ des Risikos beeinflusst Alternativen, die in Betracht kommen, die Art der Information und deren Evaluation.

b) *Stakeholder und ihre divergierenden Interessen*. Über die begriffliche Passung zwischen Wahrscheinlichkeit und Risiko hinaus hat man – etwa in der Medizin – noch viele weitere Konstituenten zu beachten (siehe Borovcnik, 2022): Medizin, Experten und Wissenschafter, Gesundheitssektor, Medien, Politiker, Selbsthilfegruppen, Pharma-Industrie. Klar, diese Stakeholder haben unterschiedliche, ja divergierende Interessen und sind völlig anders von den Folgen von Entscheidungen betroffen. Daher werden sie unterschiedliche Information nutzen und andere Kriterien verwenden, um ihre Entscheidungen zu optimieren. Man sieht, hier sind Tür und Tor für Missverständnisse und Spielchen offen. Allerdings, wie Borovcnik (2022, S. 13) feststellt: „Der Impakt in Form des Schadens, das eigentliche Risiko, und das muss man im Auge behalten, verbleibt immer beim Individuum.“

2.3 Logik und Psychologik von Entscheidungen

Borovcnik (2022) beschreibt, wie sich bei Entscheidungen rationale und idiosynkratische Betrachtungen mischen. Angesprochen werden der Nutzen, welche Beträge „im Spiel" sind, ob es Gewinn- oder Verlustsituationen sind, ob man eine Entscheidung einmalig zu treffen hat oder ob man ähnliche Entscheidungen wiederholt treffen kann. Dazu kommt noch ein Faktor, der mit Abschieben von Verantwortlichkeit zu tun hat. Eine Entscheidung, die von außen oder vom „Zufall" getroffen wird, enthebt von Verantwortung, eine eigene Entscheidung *dagegen* bringt einen in Verantwortung. Etwa kann das Monty-Hall-Problem (Drei-Türen-Problem, siehe Borovcnik, 2013) ganz einfach bereinigt werden: Die erste Wahl der einen Tür von den dreien trifft man rein zufällig (keine Verantwortung). Wenn der Moderator anbietet, die erste Wahl zu überdenken und eine andere Türe zu wählen (zu wechseln), kommt die eigene Verantwortung herein. Auch wenn Wechseln unter Standardbedingungen die Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/3 auf 2/3 erhöht, wenn der Moderator eine der verbleibenden Türen öffnet und sich dahinter eine Niete befindet, lehnen viele einen Wechsel ab, weil man dafür eigene Verantwortung übernehmen müsste, während die erste Wahl wirklich reinen Zufall birgt.

Borovcnik (2022) greift ein klassisches Experiment von Kahneman und Tversky (1979) mit Erwachsenen auf, das schon in Borovcnik (2016) behandelt wurde. Es zeigt, dass sich auch Nobelpreisträger irren können (für die darauf basierende *Prospect Theory* wurde Kahneman 2002 der Nobelpreis in der Kategorie Wirtschaftswissenschaften verliehen). Es zeigt, dass es legitime Sichtweisen auf die Experimente gibt, welche die Gewinn- bzw. Verlustsituation (aus der Sicht von Kahneman und Tversky) genau umgekehrt betrachten lassen, das bedeutet, als Verlust- bzw. Gewinnsituation. Aus dieser Re-Interpretation heraus gewinnt das häufig zu beobachtende Verhalten der Risikoaversion bei Gewinnsituationen und der Risikofreudigkeit in Verlustsituationen – so von den beiden Forschern interpretiert – an Authentizität und Rationalität. In der angesprochenen Re-Interpretation der Situationen kommt Borovcnik (2022, S. 14) entsprechend zu einer gegenläufigen Einschätzung,

> „wonach die Menschen zu Recht das Risiko vermeiden, wenn sie eigentlich einen größeren Bestand ihres Vermögens aufs Spiel setzen würden, wogegen sie das Risiko suchen, wenn sich eine Gelegenheit ergibt, […] Schulden mit einem Mal abzubauen".

Inzwischen wurde die Re-Analyse ausgefeilt. Das bezieht sich auch auf die Erweiterung des Experiments, in welcher eine Einzelentscheidung vielen, wiederholten Entscheidungen gegenübergestellt wird. Schwerwiegender ist, dass die Logik hinter singulären und wiederholten Entscheidungen zu gegenteiligen besten Entscheidungen führt (Borovcnik, 2022, S. 14):

> „Das am schwersten zu Akzeptierende ist allerdings, dass eine für die *wiederholte* Entscheidungssituation abgestimmte Entscheidung zu einer anderen Entscheidung führt, als wenn man nur *eine* Entscheidung treffen muss – ja die Entscheidungen kehren sich geradewegs um. Darüber hinaus ist festzustellen, dass bei wiederholten Entscheidungen der Spielraum des Zufalls völlig zusammenbricht, während man bei einer Einzelentscheidung das volle Risiko der Zufallsschwankungen zu gewärtigen hat."

3. Statistische Inferenz verstehen lernen mittels bedingter Wahrscheinlichkeit

Die Querverbindungen werden in fünf Begriffsfeldern vorbereitet: Statistische Inferenz mittels der bedingten Wahrscheinlichkeit verstehen lernen (BF_1). Deutung der Situation in der Bayes-Formel als statistischer Test – bei statistischen Tests fehlt die a priori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese (BF_2). Die Fisher-Neyman-Kontroverse (BF_3) – wie man statistische Entscheidungen begründet und ob dies sinnvoll ist. Das Risiko von Fehlentscheidungen auf lange Sicht (BF_4) – das Verhalten eines statistischen Tests im wiederholten Einsatz vs. die Einzelfallentscheidung. Eine Analogie zwischen Medizin und statistischen Tests (BF_5) erhellt medizinische Fragestellungen und statistische Methoden. Der Schlüssel für statistische Inferenz ist, bedingte Wahrscheinlichkeit korrekt zu verstehen.

3.1 Fünf Begriffsfelder, die Wahrscheinlichkeit und statistische Inferenz verknüpfen

BF_1: Der Schlüssel zum Verständnis: das Begriffsfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit

Der klassische Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert auf dem Begriff der Unabhängigkeit (Steinbring, 1991); er ermöglicht, den Begriff *Stichprobe* auf die unabhängige Wiederholung derselben Zufallsvariablen zurückzuführen. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit taucht schon in Kolmogorov (1933/1956) auf, wird aber mathematisch auf die Reduktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf einen Unterraum zurückgeführt. Wenngleich Unabhängigkeit nur ein Spezialfall ist (bedingte sind gleich den unbedingten Wahrscheinlichkeiten), kann man bedingte Wahrscheinlichkeiten vermeiden und eine naive frequentistische Deutung von Wahrscheinlichkeit verfolgen, was auch Kolmogorov so beabsichtigt hat. Bei der Bayes-Formel wird aber klar, dass sich eine Einzelentscheidung und keine wiederholbare Entscheidung auftut und die Deutung des Mechanismus der Formel nur durch Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in Richtung einer epistemischen (subjektivistischen) Interpretation ermöglicht wird. Diesen Widerspruch zwischen einer frequentistisch angelegten Wahrscheinlichkeit und der Notwendigkeit, bei der Bayes-Formel auf einen ganz anderen Wahrscheinlichkeitsbegriff auszuweichen, sehen Carranza und Kuzniak (2008) als didaktisches Dilemma.

Mehr noch: in allen Varianten zur statistischen Inferenz wird bedingte Wahrscheinlichkeit zentral. Borovcnik (2021b) hat den Wahrscheinlichkeitsbegriff mit Einschließung der statistischen Inferenz aus der Perspektive der Wissenschaftstheorie untersucht und Stegmüllers (1973) und Hackings (1965) „Entscheidungen“ ad absurdum geführt, bei einem rein frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu verharren, „weil die Subjektivierung der Physik“ ein viel schlimmeres Übel wäre als die Rationalitätslücken in der statistischen Inferenz. So hat sich auch die Fisher-Neyman-Kontroverse darüber erstreckt, ob die Qualitätsindizes (die eigentlich bedingte Wahrscheinlichkeiten sind) für statistische Tests keinerlei frequentistischer Deutung zugänglich sind (Fisher) oder nur rein frequentistisch zu deuten sind (Neyman). Die Interpretation von Fehlentscheidungen bei statistischen Tests zeigt, dass der springende Punkt eine langfristige Interpretation von bedingten Wahrscheinlichkeiten ist, während sie eigentlich im Einzelfall verwendet werden. Heute folgen wir einer hybriden Auffassung (Hubbard & Bayarri, 2003), die einem Lavieren längs Anforderungen aus Anwendungen entspricht und bar jeder theoretischen Begründung ist. Wie dringlich eine epistemische (subjektivistische) Deutung von Wahrscheinlichkeit gebraucht wird und wie man Wahrscheinlichkeit und statistische Inferenz erst durch das Wechselspiel zwischen frequentistischen und epistemischen Aspekten verstehen kann, sieht man an einer Analogie zwischen Medizin und statistischen Tests in Borovcnik (2022). Auch hier handelt es sich um eine Wechselwirkung von bedingten Wahrscheinlichkeiten mit dem Kontext.

BF_2: Die Situation der Bayes-Formel als statistischer Test: die a priori-Wahrscheinlichkeit fehlt

Unterstellen wir folgende Situation: Wir haben einen Würfel, der entweder regulär oder besonders ist. Wir wollen anhand des Ergebnisses von 100 Würfen entscheiden (testen), welche der beiden Hypothesen zutrifft. Wir können dabei Fehler machen. Wie groß diese Fehler sind, wirft ein Licht auf die Qualität des statistischen Tests. Wir erörtern einige Eigenschaften und verbinden die Situation mit der Ausgangssituation in der Bayes-Formel. Durchwegs tauchen bedingte Wahrscheinlichkeiten auf.

Das Testproblem

Nullhypothese H_0: R Regulärer Würfel „alle Augenzahlen gleichwahrscheinlich“ gegen Alternativhypothese H_1: B Besonderer Würfel mit „20% Wahrscheinlichkeit für 6, 1-5 gleichwahrscheinlich“. Die Folgen der Hypothesen für die Entscheidungsgrundlage: Anzahl der 6er in 100 Würfen: Unter H_0 gilt $X \sim B(100, 1/6)$, unter H_1 $X \sim B(100, 0.20)$. Die Entscheidung falle für regulärer Würfel, wenn $X \leq 25$ (Ereignis E^c) und für Besonderer Würfel, wenn $X > 25$ (Ereignis E). (Zur Vereinfachung reduzieren wir das Problem rein auf die Anzahl der Sechser.) Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(E \mid R) = 0.0119,\ P(E \mid B) = 0.0875 \text{ sowie } P(E^c \mid R) = 0.9881 \text{ und } P(E^c \mid B) = 0.9125.$$

Übersicht über die Fehler

Je nach Szenario (Regulärer oder Besonderer Würfel) kann man beim Test Fehler machen (Tab. 1). *Fehler vom Typ I*: Die Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl sie zutrifft. Die Wahrscheinlichkeit dafür nennt man $\alpha = P(E \mid H_0)$. *Fehler vom Typ II*: Die Nullhypothese wird nicht verworfen, obwohl tatsächlich die Alternativhypothese zutrifft. Die Wahrscheinlichkeit dafür nennt man $\beta = P(E^c \mid H_1)$. Diese Fehler heißen auch α- und β-Fehler. Man beachte, dass beide Fehlerwahrscheinlichkeiten *bedingt* auf das jeweilige Szenario – d.h. bedingte Wahrscheinlichkeiten – sind und daher nur schwer miteinander zu vergleichen, geschweige denn in ihrer absoluten Größe zu interpretieren sind.

Tab. 1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten für Fehler beim Test und korrekte Entscheidungen im Vorausblick

Ereignis Entscheidung	***E*^c^** nicht gegen R, nicht für B ("für" R)	***E*** gegen R (für B)
H_0: R	**ok – "Spezifität"** 0.9881	**α-Fehler** 0.0119
H_1: B	**β-Fehler** 0.9125	**ok – "Sensitivität"** 0.0875

Festlegung eines statistischen Tests

Legt man einen statistischen Test als reinen Signifikanztest an – die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn ein Schwellenwert überschritten wird (hier 25 6er) – so haben wir einen α-Fehler von 0.0119. Dann brauchen wir keine Alternativhypothese zu formulieren. Wir tun diesfalls so, dass wir nur eine größere Tendenz, Sechser zu „erzeugen“, als Einwand gegen die Nullhypothese ansehen, womit wir indirekt vom Modell her die Möglichkeit ausschließen, dass der Würfel auch eine kleinere Wahrscheinlichkeit für den Sechser haben könnte. Implizit stellen wir den „reinen Zufall“ auf die Prüfwaage und entscheiden uns gegen diese Annahme, wenn die Daten sehr stark dagegensprechen. Wie sehr die Daten gegen den reinen Zufall sprechen, „messen“ wir mit α, wobei wir noch festlegen müssen, ob dies vor Realisierung der Stichprobe (des empirischen Tests) erfolgt oder nachher.

Es braucht aber mehr als den α-Fehler, um die Qualität des Tests zu beurteilen, denn der β-Fehler ist hier mit 0.9125 enorm groß. Das Komplement davon wird auch als Macht angesehen, dass der Test eine bestimmte Alternativhypothese erkennt. Wenn wir den Schwellenwert zuerst bestimmen wollen, so könnten wir den Wert 25 variabel halten und dann den α- gegen den β-Fehler abwägen. Um das Problem zu vereinheitlichen, gibt man den α-Fehler vor (also VOR jeglicher Stichprobenentnahme) und minimiert danach den β-Fehler durch Wahl des Ablehnungsbereichs. Im vorliegenden Problem werden wir den Ablehnungsbereich geschlossen aus den größten Werten von X nehmen und, ohne es nachzuweisen wird es klar sein, dass dadurch – bei festem α – der Wert von β bereits optimiert ist.

Was hat das statistische Testen nun mit der Bayes-Formel zu tun?

Ausgehend von der Frage, wie groß denn nun die Wahrscheinlichkeit für die Nullhypothese (der reguläre Würfel) wäre, wenn man in der Serie der 100 Würfe das Ereignis *E* beobachtet und daher die Nullhypothese ablehnt (wir wollen nur das Ereignis *E* feststellen und nicht spezifizieren, wie viele Sechser wir tatsächlich geworfen haben – diese Verkomplizierung wollen wir hier außer Acht lassen)

– also, ausgehend von der Frage, wie groß ist $P(H_0 \mid E) = P(R \mid E)$? –

müssen wir feststellen, dass wir außerstande sind, dies ohne weiteres zu berechnen. Wenn wir allerdings vorweg eine (a priori) Wahrscheinlichkeit für H_0 von 0.50 bzw. alternativ dazu von 0.10 und 0.90 annehmen, dann können wir diese Wahrscheinlichkeit mittels der Bayes-Formel ausrechnen. Wir nehmen zusätzlich an, dass H_0 und H_1 alle Möglichkeiten für die Hypothesen erschöpfen. Wir könnten die Bayes-Formel vermeiden und Baumdiagramme oder Vierfeldertafeln mit erwarteten Werten (siehe Borovcnik, 2022) verwenden. Wir wollen es aber direkt ausrechnen (Tabelle 2).

Es mag überraschen, dass die Wahrscheinlichkeiten für die Nullhypothese unterschiedlich ausfallen, je nach Wert der a priori-Wahrscheinlichkeit. Man beachte, dass auch für die Gleichwahrscheinlichkeit der beiden Hypothesen bei Ablehnung der Nullhypothese diese immer noch eine Wahrscheinlichkeit von fast 12% hat. Und eben nicht α. Ganz allgemein gilt nämlich $P(E \mid F) \neq P(F \mid E)$; eine Gleichsetzung von bedingter Wahrscheinlichkeit in den beiden Richtungen ist aber ein weit verbreiteter Fehler.

Für die Alternative des besonderen Würfels mit 0.20 Wahrscheinlichkeit für den Sechser hat der Test nur eine Macht von 0.0875, dass diese auch erkannt wird; nur mit dieser kleinen – bedingten – Wahrscheinlichkeit kommt es beim genannten Test zur Ablehnung, falls diese tatsächlich zutrifft.

Tab. 2: Drei Szenarien zur Berechnung der a posteriori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese bei Ablehnung

a priori	$P(H_0) =$		0.10	0.50	0.90	Szenario
Multiplikationsregel	$P(H_0 \wedge E) =$	$P(H_0)*P(E \mid H_0) =$	0.0012	0.0059	0.0107	Dividend
	$P(H_1 \wedge E) =$	$P(H_1)*P(E \mid H_1) =$	0.0787	0.0437	0.0087	
Totale Ws.	$P(E) =$		0.0799	0.0497	0.0194	Divisor
Def. Bed. Ws.	$P(H_0 \mid E) =$	$\frac{P(H_0 \wedge E)}{P(E)}$	0.0149	0.1195	0.5500	a posteriori

Fazit: Wenn wir eine a priori-Wahrscheinlichkeit für die Nullhypothese unterstellen, so können wir auch die Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese berechnen, falls wir im Experiment zu einer Testentscheidung Ablehnung kommen (wenn E eintritt, wir also mehr als 25 Sechser in 100 Würfen erhalten).

Wir können die Situation in der Bayes-Formel, im einfachsten Fall mit zwei Möglichkeiten a priori (als H_0 und H_1 umgedeutet) und einem Ereignis E und dessen Komplement als statistischen Test der Nullhypothese H_0 mit E als Verwerfungsbereich interpretieren. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten im „Vorausblick“, i.e., $P(E \mid H_0)$ und $P(E \mid H_1)$, sind bekannt. Im Jargon des statistischen Tests werden diese zum α-Fehler bzw. zu $1 - \beta$ (d.h., zum Komplement des β-Fehlers). Wenn die Situation als Bayes-Situation aufgefasst wird, dann ist auch die a priori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese bekannt und man kann weitere bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen, nämlich

$$P(H_0 \mid E),\ P(H_1 \mid E) \text{ sowie } P(H_0 \mid E^c),\ P(H_1 \mid E^c).$$

Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten sind viel wichtiger. Sie beziehen sich darauf, dass die Nullhypothese doch zutrifft, auch wenn sie abgelehnt wird. Eigentlich ist die Komplementärwahrscheinlichkeit noch viel wichtiger, die man als „zu Recht ablehnen“ auffassen kann (wenngleich diese Formulierung eine „gefährliche“ Verkürzung darstellt, weil man das Ergebnis nicht mehr auf eine bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht). Sie beziehen sich ferner darauf, dass die Nullhypothese zutrifft, wenn sie nicht abgelehnt wird (E^c), also auch diesfalls eine korrekte Entscheidung getroffen wird.

Die übliche Rechtfertigung, einen statistischen Test und eben nicht die Bayes-Formel anzuwenden, ist die, dass man über die a priori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese seltenst verfügt und daher auf einen statistischen Test als Ersatzverfahren ausweichen muss, bei dem man nur die (von den Hypothesen auf die Stichproben) vorausblickenden Fehlerwahrscheinlichkeiten in Betracht zieht. Und dass man die Fehlerwahrscheinlichkeiten im Rückblick, oder als komplementäre bedingte Wahrscheinlichkeiten gewendet, die Wahrscheinlichkeit korrekter Entscheidungen im Fall der Ablehnung (wie auch im Fall der Nicht-Ablehnung) in einem Test eben *nicht* berechnen kann.

Man macht damit alle Testsituationen gleich. Unabhängig davon, wie plausibel oder gut (oder wie wenig) gestützt eine Nullhypothese im konkreten Problem eigentlich ist. Und dass man in den meisten Fällen auf die umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeiten für Fehlentscheidungen eben verzichten muss, nimmt man einfach hin mit dem Verweis, sie wären im Kontext der meisten Probleme ohnehin kaum von Interesse. Das letztere Argument werden wir im Zusammenhang mit der Analogie zwischen Medizin und statistischer Inferenz zu Fall bringen.

BF$_3$: Die Fisher-Neyman-Kontroverse – wie man statistische Entscheidungen begründet

Die Debatte läuft im Wesentlichen über eine frequentistische oder nicht-frequentistische Interpretation von Qualitätsindizes von statistischen Tests, die eigentlich bedingte Wahrscheinlichkeiten sind. Anstatt uns mit abstrakten Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu plagen, wie wir das im Testproblem in BF$_2$ gemacht haben, gehen wir von folgenden zwei Datensätzen aus, welche dieselbe Aufgabenstellung haben, nämlich zu beurteilen, ob die dahinterstehenden Diagnoseverfahren geeignet sind, bzw. wie wir beurteilen können, wie gut diese Diagnoseverfahren sind. Wir sprechen also gleich die Analogie zwischen Medizin und statistischen Test an, die Inhalt von BF$_5$ ist.

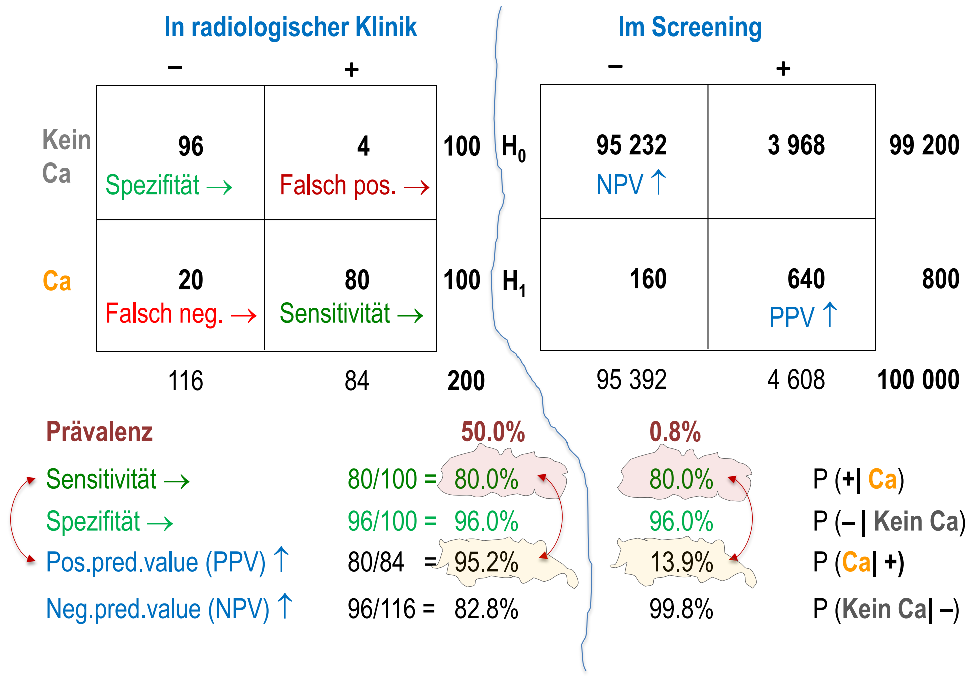


Abb. 1: Fehlendes Bindeglied beim statistischen Testen: die a priori-Wahrscheinlichkeit – identische Sensitivität und Spezifität aber völlig verschiedene Wahrscheinlichkeiten für Fehlentscheidungen (aus Borovcnik, 2022)

Die Fälle in Abb. 1 betreffen dabei Patienten, welche letztlich einen bestätigten Status bezüglich der Erkrankung (*Ca*, *Kein Ca*; *Ca* meint Carcinom) haben. Die Diagnose *positiv* (+) ist ein Indiz dafür, dass die Person die Krankheit hat. Die Diagnose *negativ* (–) ist ein Indiz für das Gegenteil. Während die Daten aus der Klinik bestätigt sind, werden die Daten aus dem Screening von der Qualität der Diagnose aus der Klinik übertragen und an die geänderte Prävalenz der Krankheit angepasst – statt 50% hat die Krankheit im Screening nur den altersbedingten Durchschnitt von 0.8% als Prävalenz.

Wir zeichnen folgendes Gedankenexperiment: Wir ziehen aus der Grundgesamtheit von 200 Personen eine und stellen deren Merkmale fest: *kein Ca* und *neg.*, *kein Ca* und *pos.*, *Ca* und *neg.* bzw. *Ca* und *pos*. Diese Zufallsauswahl hat zur Folge, dass für jede Person, für die *kein Ca* zutrifft, eine bedingte Wahrscheinlichkeit von 4/100 = 4% besteht, dass sie *positiv* ist. Ganz analog ergeben sich andere bedingte Wahrscheinlichkeiten, etwa die bedingte Wahrscheinlichkeit von 4/84 = 4.8%, dass eine Person mit Merkmal *pos.* tatsächlich *kein Ca* hat. Fürs Screening gelten analoge Überlegungen. Wir fassen die Situation wie folgt als statistischen Test auf:

- H_0 der Patient hat diese Krankheit *nicht* (*Kein Ca* ≡ Kein Carcinom)
- H_1 der Patient hat diese Krankheit (*Ca* ≡ Carcinom).

Die Testentscheidung wird gemäß medizinischer Merkmale (Entartung des CT etc.) getroffen und kommt zum Ergebnis *pos*. bzw. *neg*. Uns interessieren diese Merkmale nur insofern, als es eben zu Entscheidungen kommt, deren bedingte Wahrscheinlichkeiten aus den Daten aus Abb. 1 berechnet werden können: Fisher (1935) verwendete die direkte Wahrscheinlichkeit $P(x|H_0)$ als abstrakte Distanz zwischen Daten x und Nullhypothese H_0. Bei Fisher entbehrt das Signifikanzniveau jeglicher Stichprobeninterpretation; es ist eine Größe, für die eine Deutung als relative Häufigkeit fehlt. Neyman und Pearson (1928) bestanden darauf, dass ein statistischer Test neben der Nullhypothese auch eine Alternative betrachten muss, und ein Test eine Entscheidung darstellt, bei der zwei verschiedene Arten von Fehlern auftreten, die als relative Häufigkeiten auf lange Sicht zu verstehen sind.

Zu bemerken ist, dass der Wert von x hier unberücksichtigt bleibt, allein das Distanzmaß $\alpha = P(x|H_0)$ geht aus unseren Daten hervor und das sogenannte *Signifikanzniveau* von $\alpha = 4\%$ in der Klinik (wie auch im Screening). Ist dieses Diskrepanzmaß klein, so ist die Nullhypothese unglaubwürdig und wird abgelehnt. Nach Fisher hatte α keinerlei Häufigkeitsinterpretation und wurde eigentlich erst nach Bekanntwerden von x berechnet, im Sinne eines ex-post bestimmten p-Werts. Aus praktischen Erwägungen haben sich jedoch 5% bzw. 1% als Standardwerte zum Vergleich eingebürgert und man sprach von signifikanten bzw. von höchst signifikanten Abweichungen von der Nullhypothese.

Bei einem statistischen Test nach Fisher wird also die Nullhypothese allein durch das im Nachhinein festgestellte Diskrepanzmaß bewertet. Wie sich der Test im Fall des Vorliegens der Alternativhypothese verhält, war ohne Belang. So ein Test war Situationen wie der des Tests auf Unkorreliertheit (Nullhypothese Korrelationskoeffizient $r = 0$) oder der Varianzanalyse (Nullhypothese: Erwartungswerte sind alle gleich, mit der bekannten Konsequenz auf die F-verteilte Testgröße) angepasst.

Schon im einleitenden Würfel-Beispiel könnten wir einen weiteren Index der Qualität eines vorgeschlagenen Testverfahrens betrachten, nämlich, die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Test *nicht* zur Entscheidung Ablehnung der H_0 kommt, obwohl (wenngleich) die Alternativhypothese H_1 zutrifft. Das ist der β-Fehler oder Fehler zweiter Art. Genau das hat Neyman gefordert und festgestellt, dass die zwei verschiedenen Arten von Fehlern als relative Häufigkeiten auf lange Sicht zu verstehen sind. Mathematisch gesehen ist das Problem erst dann traktabel, wenn der α-Fehler vorgegeben und danach der β-Fehler durch die Wahl des Ablehnungsbereichs optimiert wird. Dann aber spielt der p-Wert ex post und der tatsächlich beobachtete Wert der Testgröße keinerlei Rolle.

Heute verwenden wir eine Hybridversion, nämlich den abstrakten p-Wert nach Fisher, wir interpretieren ihn aber als relative Häufigkeit auf lange Sicht im Sinne von Neyman und Pearson (1928). Über diese Inkonsistenz hinaus jedoch zeigen die beiden Szenarien aus der Medizin in Abb. 1, dass α- und β-Fehler wenig hilfreich sind, weil sie sich auf ein künstliches Szenario der Testwiederholung statt auf die Hypothese selbst beziehen.

Interpretiert man die beiden Szenarien als statistischen Test, so ergeben sich in beiden Fällen folgende (bedingte) Fehlerwahrscheinlichkeiten:

- Fehler, H_0 abzulehnen, falls sie zutrifft: $\alpha = 4/100$ bzw. $3968/99200 = 4\%$
- Fehler, H_0 nicht abzulehnen, falls tatsächlich H_1 zutrifft: $\beta = 20/100$ bzw. $160/800 = 20\%$

Wie wichtig es für eine profundere Bewertung eines statistischen Tests ist, auch den β-Fehler zu betrachten, konnten wir im Würfelbeispiel (BF_2) sehen. Dem kleinen α-Fehler von 1.19% stand ein β-Fehler von 91.25% gegenüber. Der Test hatte gar keine Macht zu entdecken, dass die Alternative zutrifft (die entsprechende bedingte Wahrscheinlichkeit beträgt nur 8.75%). Aber auch in der Neyman-Variante ist der statistische Test außerstande, die Frage zu beantworten, wie groß die bedingte Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese ist, wenn der Test zur Ablehnung kommt. Während man in der Wissenschaftstheorie ganz allgemein noch darüber philosophieren kann, ob einer Hypothese eine Wahrscheinlichkeit zukommt (und wie diese zu verstehen ist, wenn es kein Experiment gibt, das dem entspricht, weil Hypothesen keine empirischen Aussagen sind sondern nur indirekt Implikationen über die Realität bedingen), ist diese Fragestellung im Rahmen der medizinischen Diagnose essentiell: Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die spezielle Person, die eine positive Diagnose erhalten hat, tatsächlich diese Krankheit hat?

BF$_4$: Das Risiko von Fehlentscheidungen auf lange Sicht – wiederholter Einsatz von Tests vs. Einzelfallentscheidung

Der springende Punkt einer statistischen Testmethode ist eine langfristige Interpretation von bedingten Wahrscheinlichkeiten, während die Methode eigentlich im Einzelfall verwendet wird. Fisher (1971/ 1935) validiert eine singuläre Nullhypothese anhand empirischer „Beweise“. Neyman und Pearson (1928) dagegen entwickeln ihre Politik der wiederholten Tests im Kontext der entscheidungsorientierten industriellen Prozesssteuerung. Im Neyman-Pearson-Kontext können wiederholte Entscheidungen getroffen werden, so dass Fehler durch langfristige relative Häufigkeiten interpretiert werden können. Allerdings beschränkt sich diese Häufigkeitsdeutung auf die Situation innerhalb desselben Szenarios, und kann nicht zwischen Szenarien unterschiedlicher Qualität erstreckt werden. Bei diesen Fehlern handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten und keineswegs um absolute Wahrscheinlichkeiten.

BF$_5$: Eine Analogie zwischen Medizin und statistischen Tests erhellt medizinische Fragestellungen und statistische Methoden

Auch hier handelt es sich um eine Wechselwirkung von bedingten Wahrscheinlichkeiten mit dem Kontext: Der medizinische Kontext hilft, Begriffe und die Entscheidungssituation zu klären.

In der Diagnosesituation wird die Nullhypothese H_0, Patient hat die in Frage stehende Krankheit *nicht* gegen die Alternativhypothese H_1 getestet, dass er diese Krankheit hat. Dabei steht die Diagnose *pos*. (+) für ein Indiz, dass er diese Krankheit hat und der Patient wird so behandelt als hätte er diese besagte Krankheit – in der Analogie zum Test wird die Nullhypothese abgelehnt. Dagegen ist die Diagnose *neg*. (–) ein Indiz für das Gegenteil, der Patient wird als „gesund“ betrachtet, die Nullhypothese wird beibehalten. In der Diagnostik sind statt dem α- und β-Fehler deren Komplemente in Gebrauch, um die Qualität der Diagnoseprozedur zu beurteilen. Die Spezifität $1 - \alpha$ ist dabei die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein „Gesunder“ die Diagnose negativ erhält. Die Sensitivität $= 1 - \beta$ dagegen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient mit der Krankheit die Diagnose positiv erhält. Falsch-positive und falsch-negative Diagnosen entsprechen dem α bzw. β-Fehler.

In der Medizin aber gibt es relevantere Wahrscheinlichkeiten, nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient bei einer positiven Diagnose (+) tatsächlich erkrankt ist, was einer isolierten Einzelfallentscheidung entspricht. Diese Wahrscheinlichkeit wird als positiver prädiktiver Wert (PPV, *positive predictive value*) bezeichnet. Ähnlich verhält es sich mit dem negativen prädiktiven Wert (NPV) für eine negative Diagnose. Die statistischen α- und β-Fehler beschreiben untergeordnete Aspekte der Qualität des diagnostischen Verfahrens. Im Hinblick auf die Situation in Abb. 1 sei festgehalten:

i. Die Qualitätsindizes haben in beiden Situationen denselben Wert: Sensitivität $1 - \beta = 80\%$, Spezifität $= 1 - \alpha = 96\%$. Die Szenarien unterscheiden sich jedoch stark im prädiktiven Wert, entweder positiv oder negativ: PPV und NPV hängen vom jeweiligen Kontext ab. Das bedeutet, die Qualität der Entscheidungen ist sehr verschieden: Eine positive Diagnose mag in der Klinik vielleicht eine Unterstützung sein, sie ist aber im Screening nutzlos. Die Diskrepanz ist umso größer, je kleiner die Prävalenz ist.

ii. A posteriori-Wahrscheinlichkeiten haben ohne Bezug auf a priori-Wahrscheinlichkeiten keinerlei Sinn, sie entbehren über ein sehr eng abgestecktes Szenario hinaus vollständig einer Häufigkeitsdeutung. Überdies ist diese Häufigkeitsdeutung für das Individuum wertlos, sie dient nur als Referenzpunkt für das System (auch als Argumentationshilfe, um die diagnostische Prozedur zu “rechtfertigen”). iii. Der Kontext der Medizin erleichtert das Verständnis dessen, was bei klassischen statistischen Tests fehlt: Die a priori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese! Statistische Inferenz verstehen geht über die Analogie mit der Medizin (siehe auch Borovcnik, 2022).

4. Schlussfolgerungen

Klassische statistische Inferenz ignoriert die a priori-Wahrscheinlichkeiten. Die Kontroverse in den Grundlagen ist auf diese a priori-Wahrscheinlichkeit zurückzuführen. Die Analogie zwischen statistischen Tests und medizinischer Diagnose hilft zu erkennen, dass bei klassischen Tests die a priori-Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese fehlt. Ferner kann sie auch keine frequentistische Wahrscheinlichkeit sein, sondern muss einen qualitativen Grad der Überzeugung darstellen, also eine subjektivistische (epistemische) Wahrscheinlichkeit sein. Ganz wie dies Brousseau mit seiner „glissement didactique“ als Gefahr von didaktischen Übervereinfachungen dargestellt hat: Die Vereinfachung der Komplexität der Inferenz führt zu einer Karikatur der Konzepte.

Das Problem der Reduktion der Komplexität. Die Reduzierung der Komplexität auf der Grundlage einer rein frequentistischen Wahrscheinlichkeit löst die konzeptionellen Probleme nicht. Ebenso mag ein Bayesianischer Ansatz intuitiver sein und auf natürliche Weise zur statistischen Inferenz führen, aber auch hier gilt es, das *gesamte* Konzept der Wahrscheinlichkeit abzudecken, wie dies etwa Migon und Gamerman (1999) oder Vancsó (2009) tun: sie schlagen vor, die klassische und die Baysianische Inferenz parallel zu unterrichten. Ihre Begleitforschung zu entsprechenden Unterrichtsversuchen zeigt vielversprechende Ergebnisse. Fragen der computergestützten Visualisierung der a priori- und a posteriori-Verteilungen und der Berechnung sind noch zu lösen. Wichtig ist auch, den Verteilungsbegriff allgemeiner (allgemeiner als Normalverteilung und Verwandtes) anzulegen und ihn auch visuell und begrifflich besser zu erschließen.

Alle Deutungen von Wahrscheinlichkeit sind zu stützen und mit Fragen der statistischen Beurteilung zu verknüpfen. Größere Komplexität ermöglicht tieferes Verständnis: Die Herausforderung ist, geeignete Lernwege zu entwickeln. Zwei Aussagen von zukünftigen Lehrkräften von Vancsó (2009) könnten aber überzeugen, dass sich die Mühe lohnt:

> „Ich habe das Konfidenzintervall erst verstanden, nachdem ich mich mit der Bayesianischen Region maximaler Dichte vertraut gemacht habe.“ „Ich mag Bayesianische Ideen sehr gerne [...] weil ich dadurch gesehen habe [...] warum Menschen unterschiedliche Meinungen haben [...] weil sie eben unterschiedliche Vorverteilungen haben.“

Der Fall der kleinen Wahrscheinlichkeiten. Es ist unmöglich, zuverlässige Informationen aus Daten zu einer Wahrscheinlichkeit von nur 10^{-4} zu gewinnen. Daher sind kleine Wahrscheinlichkeiten empirisch nicht erfassbar, sondern können nur durch Annahmen modelliert werden. Dies führt zu einer eher qualitativen als frequentistischen Konnotation von Wahrscheinlichkeit. Die statistische Inferenz ist nun einmal gespickt mit kleinen Wahrscheinlichkeiten. Entweder wir verwenden Annahmen in Form von Modellen oder wir verweisen auf den metaphorischen Charakter von Wahrscheinlichkeit. Oder wir setzen mit Hinblick auf die moralische Wahrscheinlichkeit so kleine Wahrscheinlichkeiten auf Null. Dies wäre oftmals die bessere Lösung als Artefakte zu erzeugen (siehe das BSE-Beispiel).

Die Logik wiederholter Entscheidungen. Ob eine Entscheidung optimal ist, hängt davon ab, ob sie einmal (ein einziges Mal) oder wiederholt getroffen wird. Im medizinischen Bereich unterscheidet sich die Entscheidung eines Staates oder einer Institution von der optimalen Entscheidung einer Privatperson aufgrund der unterschiedlichen Logik von wiederholten Entscheidungen im Vergleich zu Einzelentscheidungen. Unterschiede im Nutzen und die Interessen der Beteiligten auf verschiedenen Ebenen kommen noch verschärfend hinzu.

Wir befürworten eine pluralistische Perspektive auf den Begriff Wahrscheinlichkeit, die eine vergleichende statistische Inferenz (Barnett, 1982) beinhaltet und auf den Bildungsbereich übertragen wird. Es gilt, alle Wurzeln der Wahrscheinlichkeit zu nutzen, um einen nachhaltigen Sinn zu schaffen für Wahrscheinlichkeit und für statistische Schlussfolgerungen.

Ich danke Franz Pauer für seine kritischen Anmerkungen, welche die Verständlichkeit meiner Ausführungen sehr verbessert hat.

Literatur

Barnett, V. (1982): *Comparative statistical inference, 2. Aufl.* New York: Wiley.

Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016): *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Borovcnik, M. (2013): Bedingte Wahrscheinlichkeit – Ein Schlüssel zur Stochastik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 46,* S. 1–18.

Borovcnik, M. (2016): Risiko – ein Überlebensratgeber. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 49*, 1–16.

Borovcnik, M. (2021a): Informelle statistische Inferenz. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 53*, 19–34.

Borovcnik, M. (2021b): The meaning of probability from a foundational perspective. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, 6*(3), 42–76.

Borovcnik, M. (2022): Modellierung und Statistik in der Medizin. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 54*, 1–16.

Borovcnik, M. & Kapadia, R. (2018): Reasoning with risk: Teaching probability and risk as twin concepts. In: Batanero, C., et al. (Hrsg.): *Research on teaching and learning probability*. New York: Springer, 3–22.

Brousseau, G. (1984). *Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations*. Unveröffentlichter Aufsatz.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in French education. In C. Batanero, et al. (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table.* ICMI/IASE.

Cobb, G. W. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum. *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1), 1–15. escholarship.org/uc/item/6hb3k0nz#page-1

Diepgen, R. (1992). Objektivistische oder subjektivistische Statistik? Zur Überfälligkeit einer Grundsatzdiskussion. *Stochastik in der Schule, 12*(3), 48–54.

Dubben, H.-H., & Beck-Bornholdt, H.-P. (2010): *Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken*. Reinbek: Rowohlt.

Fejes-Tóth, P., Vancsó, Ö., & Borovcnik, M. (2022). Combinatorial thinking as key for introducing hypothesis testing. In S.A. Peters (Hrsg.), *Proc. Eleventh Intern. Conf. on Teaching Statistics*. The Hague: IASE.

Fisher, R. A. (1935/1971). *The design of experiments.* Edinburgh: Oliver & Boyd.

Hacking, I. (1965). *The logic of statistical inference*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hubbard, R., & Bayarri, M. J. (2003). Confusion over measures of evidence (p) versus errors (α) in classical statistical testing. *The American Statistician 57*(3), 171–182. doi.org/10.1198/0003130031856

Kahneman, D. & Tversky, A. (1979): Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica, 47*(2), 263–292.

Kolmogorov, A. N. (1933/1956). *Foundations of the theory of probability, 2. Englisch Aufl.* New York: Chelsea.

Migon, H. S. & Gamerman, D. (1999). *Statistical inference: An integrated approach*. London: Arnold.

Neyman, J., & Pearson, E. S. (1928). On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. Part I and II. *Biometrika, 20A*, 175–240; 263–294.

Spiegelhalter D. (2014, April): What can education learn from real-world communication of risk and uncertainty? Invited lecture at the Eight British Congress on Mathematical Education, Nottingham.

Stegmüller, W. (1973): *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Bd. 4*. Berlin-NewYork: Springer, 1973.

Steinbring, H. (1991): The theoretical nature of probability in the classroom. In: R. Kapadia & M. Borovcnik, (Hrsg.): Chance encounters (pp. 135–167). Dordrecht: Kluwer. doi.org/10.1007/978-94-011-3532-0_5

Vancsó, Ö. (2009): Parallel discussion of classical and Bayesian ways as an introduction to statistical inference. *International Electronic Journal of Mathematics Education 4*(3), 181–212. doi.org/10.29333/iejme/242

Varga, T. (1983): Statistics in the curriculum for everybody – How young children and how their teachers react. In: D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M Constable (Hrsg..): *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Bd. 1, SS. 71–80). Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Witmer, J., Short, T. H., Lindley, D. V. Freedman, D. A., & Scheaffer, R. L. (1997). Teacher's corner. Discussion of papers by D. A. Berry, J., Albert, & D. S. Moore. *The American Statistician, 51*(3), 262–274.

Verfasser

Manfred Borovcnik
Universität Klagenfurt, Institut für Statistik, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt
manfred.borovcnik@aau.at

Mathe-Fans an die Uni! Ein Workshop für Lehrende

ARABELLA DENK, FELIX WOLTRON, ALEXANDER HUMMELBRUNNER

Die Fakultät für Mathematik der Universität Wien bietet seit 2008 mit Unterstützung der Bildungsdirektion Wien den Schüler:innen der Sekundarstufe 1 eine regelmäßige Gelegenheit, sich altersadäquat in einer Art Mathematik-Werkstatt mit interessanten Themen auseinanderzusetzen. Anlässlich des 15-jährigen Jubiläums von MFU! lädt dieser Workshop ein, sich in Gruppen mit ausgewählten Aufgabenstellungen zu beschäftigen und über Einsatzmöglichkeiten am eigenen Schulstandort zu reflektieren.

1. Mathe-Fans an die Uni! (MFU!)

Wie bereits Hauer-Typpelt (2016) in ihrem Beitrag zur ÖMG-Tagung festgehalten hat, bietet das Projekt MFU! interessierten Schüler:innen der SEK 1 die Möglichkeit, sich außerschulisch mit mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen. Seit der Gründung unterstützt die Bildungsdirektion Wien diesen Kurs sowohl organisatorisch als auch finanziell, und ermöglicht den Schüler:innen eine kostenlose Teilnahme. Diese können ab dem Sommersemester der fünften Schulstufe durchgehend bis zum Wintersemester der achten Schulstufe die Kurse besuchen, welche in einem 14-tägigen Rhythmus an der mathematischen Fakultät der Universität Wien von wissenschaftlichem Personal in 90-minütigen Einheiten abgehalten werden. Informationen zur Anmeldung finden sich auf der Homepage des Programms (https://mfu.univie.ac.at/) und werden ebenso über die Bildungsdirektion an die Lehrpersonen weitergeben, die wiederum interessierte Schüler:innen zur Teilnahme an diesen Kursen motivieren können. Die Anmeldung erfolgt über die Erziehungsberechtigten. Teilnahmevoraussetzung ist ein ehrliches Interesse an

- Mathematik,
- Knobelaufgaben,
- und an mathematischen Inhalten, welche nicht notwendigerweise den Schulstoff betreffen.

Die Kurse fokussieren hauptsächlich auf die Förderung von Strategien und Methoden zum Problemlösen (Wissen um sie, Fähigkeit ihrer Anwendung) und auf die (Weiter-)Entwicklung des mathematischen Denkens, Begründens und Argumentierens (vgl. Hauer-Typpelt 2016, S. 35). Zusätzlich zielen die Einheiten darauf ab, das Bild der (Schul-)Mathematik fern von Leistungsdruck zu erweitern. Ein klares „Nicht-Ziel" ist die Bearbeitung möglichst vieler Inhaltsbereiche des Schulstoffes bzw. deren Vorbereitung. MFU! sieht sich somit nicht als Förderunterricht.

Die Realisierung dieser Ziele erfordert die passende Auswahl von Aufgabenstellungen bzw. Themen. Im Rahmen dieses Projektes werden überwiegend Problemlöseaufgaben verwendet, welche im folgenden Kapitel eingehender theoretisch analysiert werden.

2. Problemlösen

2.1. Definition

Wann spricht man in der Fachdidaktik Mathematik von „Problemen" und welche Charakteristika weisen diese auf? Im deutschsprachigen Raum wird zwischen (Routine-)Aufgaben, bei welchen der Lösungsweg/die Lösungsstrategie bekannt ist, und Problemen, welche eine sogenannte „Barriere" beinhalten, unterschieden. Ein Problem wird nach Bruder & Collet (2011, S. 11) als Anforderungssituation eingestuft, welche den Lernenden als ungewohnt und spontan nicht bewältigbar erscheint. Sie verlangt eine Umstrukturierung bzw. Kombination bekannter oder die Anwendung neuer Methoden und Techniken, welche auch als „Heurismen" bezeichnet werden. Pólya (1949, S. 155 f.) beschreibt Heurismen als „[…]

Denkoperationen, die bei diesem Prozeß [sic!] in typischer Weise von Nutzen sind." Diese bilden nach Schoenfeld (1985), neben „Ressourcen" (Vorwissen), „Beliefs" und „Kontrolle" vier essentielle Kategorien des Problemlösens. Unter „Beliefs" werden Lernenden-Überzeugungen zum Wesen und zur Struktur der Mathematik, zum Betreiben von Mathematik und der Genese mathematischen Wissens verstanden. Sind Schüler:innen der Meinung, dass der kreative Einsatz eigener Lösungsstrategien nur für „Genies" möglich ist, dass gelernte Lösungsstrategien rezepthaft angewandt werden müssen, dass das Lösen von Problemen nicht mehr als wenige Minuten in Anspruch nehmen, und es nur einen richtigen Lösungsweg bzw. eine Lösung geben kann, wird die Akzeptanz des Problemlösens im Unterricht erschwert (vgl. Schoenfeld 1992). Unter „Kontrolle" versteht Schoenfeld (1985, S. 232) „[…] the allocation of time and effort to approaches". Herold-Blasius et al. (2019, S. 299) betrachten ebenso den Umgang mit Frustration im Rahmen des Problemlöseprozesses als entscheidend für dessen gelingen.

2.2. Wie funktioniert der Problemlöseprozess?

Pólya (1949) hat in seinem Werk „Schule des Denkens" eine Grundlage für didaktische Überlegungen zum Problemlösevorgang entwickelt, welche nicht an Aktualität verloren hat. Diese gliedert sich in die folgenden vier Phasen:

1. Verstehen der Aufgabe
2. Ausdenken eines Planes
3. Ausführen des Planes
4. Rückschau

In der ersten Phase sollen sich Lernende mit der Lösbarkeit der Problemstellung unter gegebenen Bedingungen auseinandersetzen und erste Visualisierungen vornehmen. Anschließend können bekannte Methoden und Techniken auf ihre Nützlichkeit hin untersucht werden. Die Ausführung des Planes beinhaltet die Kontrolle jedes Schrittes auf seine mathematische Richtigkeit. In der letzten Phase wird die verwendete Methode reflektiert. Die bereits angesprochenen Heurismen, welche in den jeweiligen Phasen angewandt werden, können (z.B. nach Bruder & Collet 2011, S. 37) ebenso weiter ausdifferenziert werden. Sie sprechen hierbei unter anderem von „heuristischen Strategien" wie systematisches Probieren, „heuristischen Hilfsmitteln" wie die Veranschaulichung der Aufgabenstellung mittels Tabellen, „heuristischen Prinzipien" wie das Schubfachprinzip und „heuristischen Regeln" (z.B. Vorrangregeln).

Man könnte davon ausgehen, dass das Studium von Pólyas (1949) Werk zum Problemlösen jede Person gleichermaßen dazu befähigt, Problemstellungen sofort zu lösen. Dem ist jedoch nicht so. Dieser Vorgang setzt eine gewisse „geistige Flexibilität" voraus, welche nach Bruder & Collet (2011, S. 33) folgendermaßen charakterisiert werden kann:

- Intuitive **Reduktion** des Problems auf das Wesentliche.
- Umkehrung (**Reversibilität**) von Gedankengängen
- Simultane **Beachtung** mehrerer **Aspekte** und potenzieller Abhängigkeiten
- Perspektiven**wechsel** der jeweiligen **Aspekte** der Problemstellung
- **Transfer** bekannter Heurismen auf neue Problemstellungen

Ist also das Gelingen von Problemlösenprozessen genetisch determiniert? Die diesbezügliche Forschungslage (z.B. Collet 2009, S. 267) zeigt, dass die geistige Beweglichkeit mithilfe des Erlernens von Heurismen gesteigert bzw. kompensiert werden kann, auch wenn das Ausmaß evtl. bescheiden sein mag. Problemlösen ist also für alle Lernenden möglich, und sie können davon profitieren.

Warum ist die Auseinandersetzung mit Problemlöseaufgaben im Unterricht sinnvoll?

Problemlösefähigkeiten (im Mathematikunterricht) gehören zu den drei Winter'schen (1995) Grunderfahrungen und tragen somit zur Allgemeinbildung bei. Sie sind fest in den jeweiligen Curricula und bildungspolitischen Vorgaben verankert. Ein Ziel des Mathematikunterrichts ist es, „[…] mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten zu vermitteln, die im Alltag und im späteren Berufsleben nützlich sein sollen.“ (Bruder & Collet 2011, S. 20). Die Vermittlung von „Rezepten“ für alle zukünftigen Anforderungen ist aufgrund ihrer Diversität und Dynamik nicht realisierbar und aus pädagogischer und didaktischer Sicht nicht wünschenswert. Der Fokus liegt somit auf der Vermittlung von Strategien und Hilfsmitteln, um sich mit wechselnden und neuen Anforderungen auseinander setzen zu können. Wie bereits erwähnt, benötigt es dafür mehrere Voraussetzungen (z.B. Erfahrung, Frustrationstoleranz), welche im Rahmen eines problemlösenden Mathematikunterrichts erworben werden können. Der bloße Einsatz geeigneter Aufgabenstellungen ist dafür jedoch noch nicht ausreichend. Der Unterricht muss ebenso alle bereits erwähnten Kategorien („Ressourcen“, „Beliefs“, „Heurismen“, „Kontrolle“) des Problemlösens behandeln.

2.3. Problemlösen im Kurs MFU!

Die Teilnehmer:innen des Kurses beschäftigen sich nach Hauer-Typpelt (2016, S. 34) mit sogenannten geschlossenen Denkaufgaben, bei welchen der Ausgangszustand und das Ziel klar vorgegeben sind, der Lösungsweg jedoch offen ist. Die Beispiele, die individuell oder in Gruppen bearbeiten werden können, reichen von kurzen Knobelaufgaben bis hin zu komplexen Problemstellungen, innerhalb derer die Lernenden auch nur Teillösungen bearbeiten können. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem schlüssigen Argumentieren und Begründen der eigenen Resultate und dem Erkennen, Anwenden und Transferieren von Heurismen auf strukturverwandte Aufgabenstellungen.

Die Kriterien für MFU!-Aufgaben können nach Hauer-Typpelt (ebd.) folgendermaßen charakterisiert werden:

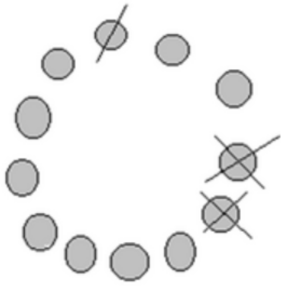
- Die Aufgabe ist für die Schüler:innen neu (die Teilnehmer:innen wünschen sich explizit eine Abwechslung zu Routineaufgaben aus dem Regelunterricht)
- Das Bearbeiten der Aufgabe macht den Teilnehmer:innen Spaß
- Es gibt vielfältige Möglichkeiten das Ergebnis zu erreichen
- Die Aufgabe muss subjektiv gesehen anspruchsvoll sein
- Die Aufgabe bringt eine natürliche Differenzierung mit sich
- Die Mehrzahl der Aufgaben hat ein eindeutiges Ergebnis

Die folgende Aufgabenstellung, welche bereits in allen Schulstufen der SEK 1 eingesetzt wurde, erfüllt aus Sicht der Autor:innen die soeben genannten Anforderungen:

Zu Beginn liegen a) 12 b) 15 Steine am Tisch. Man kann auch einfach Kreise malen. Zwei Spieler:innen nehmen abwechselnd einen oder zwei benachbarte Steine weg. Wenn zwei Steine durch eine Lücke getrennt sind, in welcher vorher ein Stein gelegen ist, sind sie nicht benachbart!

Wer den letzten Stein wegnehmen (Kreis durchstreichen) kann, hat gewonnen.

Gibt es für dieses Spiel eine Gewinnstrategie? Für wen?



3. Forschungsdesign und Realisierung im Workshop

Im Workshop der diesjährigen ÖMG-Ostertagung wurde in Anlehnung an die **Fokusgruppen-Methode** ein gemeinsamer Reflexionsprozesses von Lehrpersonen aus der Perspektive ihrer eigenen Unterrichtpraxis über potentielle Umsetzungsstrategien von Problemlöseaufgaben reflektiert und diese mit Ideen des bestehenden Projektes MFU! abgeglichen.

Analysen der verschriftlichten Diskussionsergebnisse liefern einen ersten Beitrag zur Untersuchung folgender Forschungsfragen, welche in weiteren Projekten vertieft werden:

[F1] Werden mathematische Problemlöse- bzw. MFU!-ähnliche Aufgaben im Sekundarstufen-Unterricht eingesetzt?

[F2] Welche Unterstützungsmaßnahmen wünschen sich Sekundarstufen-Lehrende für eine regelmäßige Implementierung im Unterricht?

3.1 Über das Fokusgruppen-Design

Die Fokusgruppen-Methode ist ein halbstrukturiertes Gruppendiskussionsverfahren „zur Rekonstruktion subjektiver Alltagserfahrungen und zur Generierung von Hypothesen zu bisher wenig erforschten oder komplexen Sachverhalten“ (Tausch & Menold 2015, S. 6). Flick (2010, S. 261) spricht von einer Imitation „von Alltagsdiskursen und Unterhaltungen“ und unterstreicht damit ihren partizipativen Charakter innerhalb des Forschungsprozesses.

Der Einsatz der Fokusgruppe-Methode begründet sich in der explorativen Untersuchung eines Leitthemas, das den Teilnehmenden zu Beginn der Diskussion als Stimulus für nachfolgende Reflexionen vorgestellt wird. Die Auswahl der Teilnehmenden beschränkt sich in der Regel auf vier bis acht Personen pro Gruppe und ist je nach Studiendesign bezüglich soziodemografischer Aspekte heterogen oder homogen. Die im Zuge der Fokusgruppe durchgeführten Stimuli- und Diskussionsphasen werden meist außerhalb der gewohnten Arbeits- und Lebenswelt der Teilnehmenden, durchgeführt (Bortz & Döring 2016).

Ein zentrales Merkmal der Fokusgruppen-Methode ist die „Selbstläufigkeit“ des Diskussionsgeschehens (Bortz & Döring 2016, S. 380) und, als Form des Gruppeninterviews, der Versuch der „Rekonstruktion sozialer Wirklichkeiten“ der Teilnehmenden (Krüger 1983). Geleitet wird die Diskussion daher von Verantwortlichen, die auf die Einhaltung des Diskussionsleitfadens achten, sonst aber eine in der Regel zurückhaltende und neutrale Rolle einnehmen, um mögliche Moderationseffekte auf die Studienergebnisse zu minimieren (Bortz & Döring 2016). Gegenüber anderen Formen qualitativer (Einzel-)Interviews nennt Schulz (2012, S. 12) auf Basis bereits bestehender Literatur unter anderem die Vorteile der Verfügbarkeit und Sichtbarmachung eines „kollektiven Wissensbestandes“ der Zielgruppe sowie den reduzierten Effekt sozialer Erwünschtheit bei der Beantwortung von Fragestellungen aufgrund des bestehenden Gruppensettings.

3.2 Erläuterungen zur Umsetzung im Zuge der Lehrenden-Fortbildungstagung 2023

Zur Teilnahme am Workshop und der damit verbundenen empirischen Untersuchung haben sich sieben Personen bereit erklärt. Aufgrund der gegebenen Teilnehmendenzahl entschieden sich die Autor:innen dieses Artikels für die Bildung einer heterogenen Fokusgruppe mit personenbezogenen Unterschieden im Bereich

- der Bildungsstufe (Sekundarstufen 1 und 2, Tertiärstufe) und des Schultyps (allgemein – und berufsbildend) der bisherigen Unterrichtspraxis,
- des Ausmaßes der Unterrichtserfahrung (keine, einjährig, mehrjährig)
- sowie des eigenen höchsten Bildungsabschlusses (Matura, Bachelor, Master)

Der Ablauf des Workshops, der aufgrund organisatorischer Vorgaben auf 60 Minuten begrenzt war, wurde in Anlehnung an ausgewählte Empfehlungen der Fachliteratur zur Fokusgruppen-Methode gestaltet (vgl. Bortz & Döring 2016; Tausch & Menold 2015) und lässt sich anhand der folgenden drei Phasen beschreiben:

Stimuli-Phase

- Impulsvortrag[1] zum Vorhaben von MFU! und zu allgemeinen Prinzipien mathematischen Problemlösens durch eine:n Moderator:in
- Individuelle Beschäftigung der Teilnehmenden mit repräsentativen Aufgabenstellungen des MFU!-Programms (überblicksartig und ohne Lösungsprozess).

  Ein Beispiel der zur Verfügung gestellten Aufgabensammlung wurde bereits in Abschnitt 2.3 vorgestellt.

Reflexionsphase

- Individuelle schriftliche Beantwortung der folgenden Schlüsselfragen auf Moderationskarten:

  [S1] Haben Sie bereits Erfahrungen mit Problemlöse- bzw. MFU!-ähnlichen Aufgaben in Ihrem Schulalltag?

  [S2] Sind die angesprochenen Inhalte, Ziele und Methoden von MFU! in Ihrem Schulalltag realisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

  [S3] Welche Unterstützungsmaßnahmen wünschen Sie sich, um Problemlöse- bzw MFU!-ähnliche Aufgaben zukünftig in Ihrem Unterricht zu implementieren?
- Diskussion der Reflexionsergebnisse innerhalb der Fokusgruppe

Plenumsphase

- Verbale Zusammenführung der Ergebnisse durch Interaktion der Diskussionsmoderation mit den Teilnehmenden
- Abschluss: Zuvor verschriftlichte eigene Reflexionen auf den Moderationskarten können von den Teilnehmenden adaptiert werden.

Die Auswertung der verschriftlichten Antworten wurde in Anlehnung an die **thematische Inhaltsanalyse** nach Braun & Clarke (2022) durchgeführt. Die Autor:innen dieses Beitrags entwickelten auf Basis einer kollaborativen Codierung des Datenmaterials sowie der mehrfachen Verdichtung identifizierter Inhalte zentrale Diskussionsthemen, die in den folgenden Abschnitten näher beschrieben werden.

Auf einen Video- bzw. Audiomitschnitt des Fokusgruppengesprächs wurde im Übrigen verzichtet, um den damit verbundenen möglichen Einfluss sozialer Erwünschtheit auf das Diskussionsgeschehen zu minimieren.

[1] Link zu den Vortragsfolien: https://www.oemg.ac.at/DK/LFT_Vortraege/2023/Folien_WoltronDenk.pdf

4. Resultate und Conclusio

Die Analyse des qualitativen Datenmaterials ergab bezüglich der Schlüsselfrage [S1], dass vier Proband:innen keine und drei wenig Erfahrung mit dem Einsatz von Problemlöseaufgaben in ihrer eigenen Unterrichtspraxis hatten. Die genannten Umsetzungsbeispiele beruhten vorwiegend auf einem Ergänzungsunterricht für Schüler:innen der Mittelschule, welcher als Vorbereitung für die AHS-Oberstufe abgehalten wurde:

> „Teilweise Erfahrung beim Förderunterricht von begabten SuS. Wobei (…) auch ergebnisoffene Fragen (Fermi) verwendet werden. Generell gute Erfahrungen. (Mittelschule)“

Die Frage nach der Realisierbarkeit der angesprochenen Inhalte [S2] zeigte in den meisten Fällen eine grundsätzlich zustimmende Haltung der Proband:innen. Allgemein wurden jedoch Bedenken bezüglich der Umsetzung im Regelunterricht aufgrund folgender Faktoren geäußert:

- Strukturelle Einschränkungen („50 Minuten Rhythmus“, Zeitdruck aufgrund curricularer Vorgaben und der eventuellen Vorbereitung auf abschließende Prüfungen):

> „(…) da oft jede Stunde benötigt wird, um die S&S gut auf die Matura vorbereiten zu können“

- Wahrgenommener Mangel an mathematischen Voraussetzungen („geeignetes Grundwissen“, Motivations- bzw. Frustrationstoleranz), welche für den Problemlösevorgang als notwendig erachtet werden:

> „Auf jeden Fall, jedoch vermutlich nur mit einem Teil der SuS, da einem Teil das grundlegende Wissen (kleines 1x1, Grundrechnungsarten, …) fehlt.“

Erwähnenswert ist hierbei, dass der Einsatz von Problemlöseaufgaben primär im Unterricht der AHS als realisierbar angesehen wurde:

> „(…) stark von Niveau der SuS abhängig (…) im Gymnasium wahrscheinlich eher umsetzbar als in Mittelschule“

Als notwendige bzw. gewünschte Unterstützungsmaßnahmen [S3] wurden neben Änderungen in Hinblick auf die bereits erwähnten strukturellen Hindernisse („mehr M-Stunden, welche Form auch immer“) sowie das Bereitstellen von Materialien wie Aufgabenkatalogen und Technologieunterstützung genannt.

Die identifizierten Aussagen können somit zu folgenden zentralen Themen verdichtet werden:

- Lernenden-Voraussetzungen wie Motivation und kognitive Ressourcen (Ressourcen/ Vorwissen) für erfolgreiches Problemlösen
- Überzeugungen der Lehrpersonen zu bedeutsamen Inhalten des Mathematikunterrichts mit Bezug zur Relevanz für abschließende Prüfungen (Inhaltsdimension)
- Schultypenabhängige Wahrnehmung zu Einsatzmöglichkeiten von Problemlöseaufgaben (Struktur)
- Strukturelle Organisation des Sekundarstufenunterrichts (Struktur)

Diese Themen (Bedenken von Lehrpersonen), die den bereits erwähnten Limitationen unterliegen, finden sich in vergleichbarer Form in Herold-Blasius et al. (2019, S. 297 f.):

- Dabei lernt man nicht genug. So bekommt man den Stoff nicht durch. (Inhaltsdimension)
- Das ist nur was für die Guten. (Ressourcen/Vorwissen)
- Das lässt sich im Unterricht nicht realisieren. (Struktur)
- Das mach ich doch schon. (Problemlösen = komplexe Routineaufgaben)

Die „Inhaltsdimension“ veranschaulicht eine tiefgreifende Problematik des Problemlösens. Einerseits gilt es aufzuzeigen, wie Einheiten zum Problemlösen im Regelunterricht zur Erarbeitung oder Absicherung neuer Stoffgebiete beitragen bzw. das Bild von Mathematik bei Lernenden beeinflussen können, und andererseits, ob und wie solche Aufgabenstellungen in Prüfungssituationen eingeflochten werden können. Dies wird sicher nur in einem bescheidenen und wohldosierten Umfang möglich sein, und ist insgesamt eine schwierige Aufgabe von Lehrpersonen. Rott (2018) spricht hierbei von der „Steuerungsfunktion im Unterricht (Leistungsbeurteilung)“ und „für den Unterricht (zentrale Prüfungen)“. Zusätzlich impliziert dieses Vorgehen, nach dem Motto „What you test is what you get“, die Notwendigkeit der Operationalisierung von Heurismen. Im Sinne der Überwindung von Barrieren im Rahmen des Problemlöseprozesses gilt es ebenso aus der Sicht der Fachdidaktik Mathematik diese erwähnten Hürden zu meistern, ebenso keine leichte Aufgabe.

Die primäre Verortung von Problemlöseaufgaben innerhalb der Begabungsförderung in der Dimension „Ressourcen / Vorwissen“ („Das ist nur was für die Guten“) beruht auf der Tatsache, dass viele dieser Aufgaben mit interessierten und begabten Schüler:innen leichter, schneller, besser, … funktionieren. Aber durch bewusste Steuerung und Anpassung des Schwierigkeitsgrades (es gibt auch leichtere Problemlöseaufgaben!) können passende Aufgaben für sehr viele (alle?) Lernenden gefunden werden, so dass auch diese vom bereits in Abschnitt 2.2 erwähnten Vorteil der Verbesserung flexiblen mathematischen Denkens (für alle Lernenden!) profitieren können. Hier ist nicht gemeint, dass Problemlösen den Unterricht dominieren soll, aber es sollte, wohldosiert und -überlegt *vorkommen*.

Unsere Untersuchung unter Berücksichtigung aller Limitationen deutet den Wunsch der Lehrpersonen nach Unterstützungsmaterialien und die grundlegende Bereitschaft der Behandlung von MFU!-ähnlichen an. Dieser Workshop versteht sich somit als Ausgangspunkt für weitere Erhebungen und Interventionen bezüglich dieses Themas, um allen Schüler:innen sämtlicher Schulformen die erwähnten Vorteile eines problemorientierten Unterrichts zugänglich zu machen.

Literatur

Bortz, J., Döring, N. (2016): *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. 5. überarb. Aufl. Springer.

Braun, V., Clarke, V. (2022): *Thematic analysis: a practical guide.* 1. Aufl. SAGE Publications Ltd.

Bruder, R.; Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Collet, C. (2009): *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation – Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildung*. Münster: Waxmann.

Flick. U. (2010): *Qualitative Sozialforschung*. Eine Einführung (3., vollst. überarb. und erw. Neuausg). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl.

Hauer-Typpelt, P. (2016): MFU – Ein Kurs zur Förderung mathematischer Begabung von „Mathe-Fans". In: *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges.*, 49, 33-44.

Herold-Blasius, R. et al. (2019): Problemlösestrategien lehren lernen – Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In: *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht*, 295-309. Online: https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_21, (Zugriff: 01.7.2023).

Krüger, H. (1983): Gruppendiskussionen. Überlegungen zur Rekonstruktion sozialer Wirklichkeit aus der Sicht der Betroffenen. In: *Soziale Welt*, 34, 90-109.

Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

Rott, B. (2018): Mathematisches Problemlösen – aktuelle Befunde und Bedarfe dieses Forschungsgebietes. *Vortrag AAU Klagenfurt,* Klagenfurt, 08.11.2018.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving.* Orlando:Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D. A. Grouws (Hrsg.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* 334-370, New York: MacMillan.

Schulz, M. (2012): Quick and easy!? Fokusgruppen in der angewandten Sozialwissenschaft. In: Schulz, M. et al. (2012): *Fokusgruppen in der empirischen Sozialwissenschaft: Von der Konzeption bis zur Auswertung*. VS Verlag für Sozialwissenschaften, 9-22.

Tausch, A., Menold, N. (2015): Methodische Aspekte und Durchführung von Fokusgruppen in der Gesundheitsforschung: Welche Anforderungen ergeben sich aufgrund der besonderen Zielgruppen und Fragestellungen?. *GESIS Papers*.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 61, 37-46.

Formative Leistungsbewertung im Mathematikunterricht

STEFAN GÖTZ, WIEN; EVA SATTLBERGER, WIEN

In der Bildungswissenschaft werden kriteriale und individuelle Komponenten der Leistungsbeurteilung als besonders lernförderlich angesehen. Daraus resultiert das Konzept der formativen Leistungsbewertung, das darin besteht, unterrichtliche Maßnahmen an die aktuellen Bedürfnisse und an die bereits vorhandenen Kompetenzen der Lernenden anzupassen. Um diesen Zugang auf Schulebene zu realisieren, sind verschiedene Maßnahmen (z. B. Grundkompetenzkonzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an AHS) gesetzt und fachdidaktische Konzepte (z. B. innere Differenzierung) entwickelt worden. Die daraus resultierenden fachdidaktischen Konsequenzen werden identifiziert und diesbezügliche Vorschläge für den Unterricht herausgearbeitet.

1. Einleitung und Begriffsbestimmung

Leistungsbeurteilung ist sowohl im wissenschaftlichen Diskurs als auch in der schulischen Praxis ein sehr komplexes Thema. In der Literatur wird meist zwischen Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung unterschieden und unter dem Überbegriff „Leistungsbeurteilung" zusammengefasst. Leistungsbeurteilung dient allgemein dem Erfassen von Lernwirkungen des geplanten bzw. durchgeführten Unterrichts (vgl. Arnold & Lindner-Müller 2009, S. 323 f.) bzw. informiert darüber, auf welchen Teilgebieten die Schüler:innen bestimmte Lernziele erreicht haben und auf welchen Teilgebieten noch ergänzender Unterricht nötig ist (vgl. LBVO 2016: §1 Abs. 2). Dabei liefern Leistungsfeststellungen als Messungen Informationen über den Wissens- und Kenntnisstand der Schüler:innen. Leistungsbewertung beschreibt den Vorgang des Bewertens und der Gewichtung der gemessenen Leistung, also die Evaluierung einer oder mehrerer Leistungsfeststellungen nach vorgegebenen Kriterien, um daraus Konsequenzen zu ziehen (z. B. die Umsetzung der Messungen in Noten). Demzufolge zielt Leistungsfeststellung auf Prozesse während des Lernens im Unterricht ab, um diese lernförderlich beeinflussen zu können, wohingegen (punktuelle) Leistungsbewertung bilanzierend Lernergebnisse nach den Lern- und Unterrichtseinheiten erfasst (vgl. Schmidinger et al. 2016, S. 59). Es werden demnach unterschiedliche Daten in unterschiedlichen Phasen des Unterrichts erhoben und diese Daten haben verschiedene Funktionen.

Die pädagogischen Funktionen von Leistungsbeurteilung beziehen sich auf die Steuerung des Lehr-Lerngeschehens (vgl. Eder et al. 2009, S. 248 f.). Inhalte, die Gegenstand einer Leistungsbewertung (Prüfung) sind, haben größere Bedeutung für Schüler:innen als jene, die das nicht sind (ebd.). Zudem erfüllen Leistungsfeststellungen und -bewertungen eine Feedbackfunktion für Schüler:innen und für Lehrer:innen. Die Rückmeldung kann sich dabei sowohl auf den Lernprozess als auch auf dessen Ergebnis beziehen. Gesellschaftliche Funktionen betonen vor allem Unterschiede zwischen den Schüler:innen in dreierlei Hinsicht: „Die Zuordnung zu unterschiedlichen Bewertungsklassen (*Klassifizierungsfunktion*) ist Voraussetzung für die Zuweisung zu verschiedenen Laufbahnen innerhalb und außerhalb der Schule (*Allokationsfunktion*) und zur Vergabe von Berechtigungen (*Selektionsfunktion*)." (Eder et al. 2009, S. 248, Hervorhebungen im Original). Personenbezogene Funktionen beeinflussen die Einstellung der Schüler:innen zur Schule und wirken sich auf das Selbstkonzept und auf die Vorstellung des eigenen Leistungsvermögens der Schüler:innen aus (ebd.).

Schulische Leistungen sind ohne Bezugsnorm wenig aussagekräftig und kommen so für eine gesellschaftlich relevante Beurteilung nicht in Frage. Leistungen unterliegen immer entweder einer kriterialen (lern- bzw. lehrzielbezogenen), sozialen oder individuellen (erbrachte Leistungen einer:eines Lernenden werden mit deren:dessen früheren Leistungsstand verglichen) Bezugsnorm, wobei jede in der Regel zu einem anderen Beurteilungsergebnis führt. Es kommt daher oft zu einer Parallelführung, wie sie auch die Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO 2016) vorsieht (Schmidinger et al. 2016, S. 59).

> „Die Heranziehung der lehrzielbezogenen Norm ist – v. a. wenn diese für individuelle Rückmeldungen um die individuelle Norm ergänzt wird – in der erziehungswissenschaftlichen Literatur unumstritten. Sie ist die vorzugswürdige Norm
>
> - im Interesse der Lehr-/Lern-Steuerung,
> - unter dem Aspekt der Beurteilungsgerechtigkeit,
> - mit Blick auf die Berichtsfunktion in Form von Noten und Zeugnissen und
> - unter dem Gesichtspunkt der Hinführung der Schüler/innen zur sachlich begründeten Selbsteinschätzung."

(Eder et al. 2009, S. 249).

Alternativ wird die Beurteilung von Schüler:innenleistungen nach einer Durchschnittsorientierung durchgeführt (soziale Bezugsnorm): Die Beurteilungsmaßstäbe stehen vor der Durchführung der Prüfung nicht fest, sondern werden erst im Verlauf des Beurteilungsprozesses definiert (vgl. Neuweg 2019, S. 71).

2. Formative und summative Formen von Leistungsbeurteilungen

Leistungsbeurteilung hat gemäß der Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) sowohl eine lernförderliche formative als auch eine ergebnisorientierte summative Funktion.

> „Der Lehrperson werden damit zwei verschiedene, durchaus antinomische Rollen zugeschrieben, die oft schwierig zu vereinen sind: einerseits die eines Sachverständigen, der in der summativen Funktion sein Fachurteil abgibt und andererseits die des lernunterstützenden Coachs in der formativen Funktion der Leistungsbeurteilung."

(Schmidinger et al. 2016, S. 59).

Formative Leistungsbewertung (FLB) ist ein didaktisches Prinzip zur individuellen Förderung von Schüler:innenleistungen. Unter FLB wird eine (komplexe) Unterrichtsintervention verstanden, die auf Basis von Feedback (auf Aufgaben- und Prozessebene sowie auf Ebene der Selbstregulation) Leistungsfeststellung und -bewertung mit individuellen Anregungen zum Weiterlernen und einer Anpassung des Unterrichts an Schüler:innenbedürfnisse verbindet. Die Wurzeln der FLB liegen im englischsprachigen Raum der 1960er Jahre, wo z. B. Bloom (1969, p. 48) Lernstandsdiagnosen ohne Benotung als Feedback zur Steuerung des Unterrichtsprozesses beschreibt.

Beispielsweise können so genannte schwierigkeitsgestufte Aufgabensets eingesetzt werden, die im Sinne der inneren Differenzierung (Abschnitt 4.) und Individualisierung sowie im Kontext der Selbstbestimmung den Schüler:innen die Möglichkeit geben, einfachere bzw. anspruchsvollere Aufgabenpakete zu bearbeiten und somit eine lernförderliche Wirkung erzielen sollen. So sind etwa im ersten Paket Aufgaben angeführt, die relativ einfach zu bearbeiten sowie von der Art vertrauter sind und jedenfalls von allen Schüler:innen gekonnt werden sollten. Das zweite Paket bietet Aufgabenstellungen, die vermehrt Transferwissen verlangen. Im dritten Paket sollen sich Schüler:innen mit zumindest im Ansatz neuartigen und komplexeren Aufgaben befassen. Diese richten sich an jene, die die klassischen Übungsaufgaben schon gut beherrschen und eine neue Herausforderung suchen. Exemplarisch zeigen die Abbildungen 1 bis 3 diese Stufung im Bereich der beschreibenden Statistik.

Allgemein werden verschiedene Formen der FLB kategorisiert: Ungeplante On-the-Fly Formative Assessments, Planned-for-Interaction Formative Assessments als Teil der Unterrichtsplanung und Embedded-in-the-Curriculum Formative Assessments als von Testinstitutionen bereitgestellte diagnostische Aufgabensammlungen mit dazugehörigen Auswertungsanleitungen. Während die ersten beiden reine Maßnahmen zur Unterrichtsintervention sind, sind Curriculum-Embedded-Formative Assessments standardisierte Messinstrumente, die – je nach Einsatzform – sowohl formativen als auch summativen Charakter haben können (vgl. Abschnitt 3. und Schmidinger et al. 2016, S. 62).

In einem kleinen Stadtpark kommen vor allem die Baumarten Ahorn, Birke, Eiche und Linde vor. Die Tabelle zeigt die Anzahl der Bäume. Vervollständige das Diagramm durch Einzeichnen von senkrechten Balken so, dass es zur Tabelle passt.

Baumart	**Anzahl**
Ahorn	8
Birke	12
Eiche	4
Linde	8

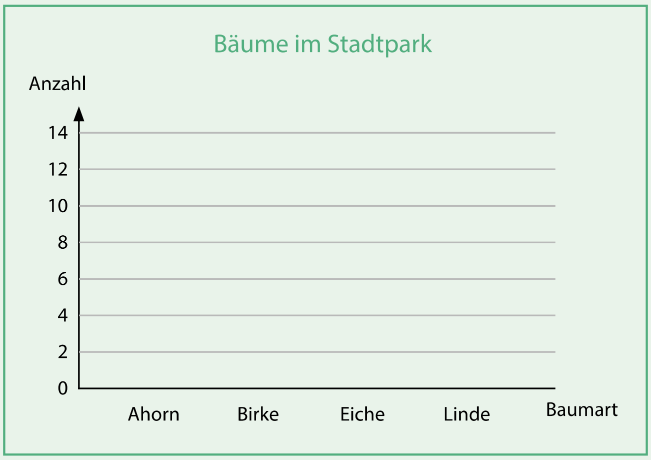


Abb. 1: Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset – Paket A (Benischek et al. 2023, S. 164).

Im Park wurden die Bäume gezählt: 10 Ahornbäume, 6 Birken, 12 Eichen und 4 Linden.

Stelle das Ergebnis der Zählung im Diagramm dar.

Beschrifte die Achsen und zeichne passende senkrechte Balken ein.

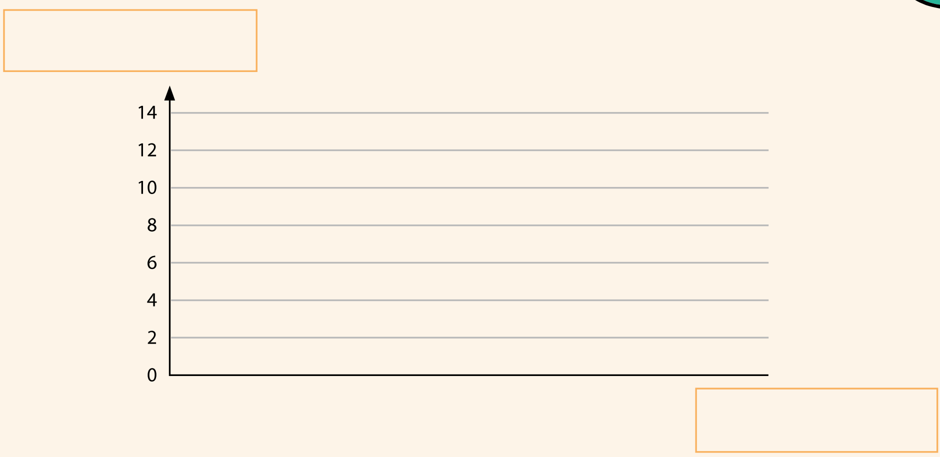
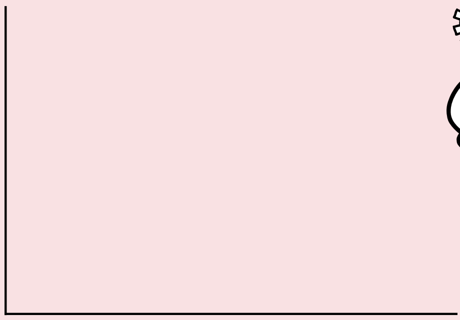


Abb. 2: Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset – Paket B (Benischek et al. 2023, S. 166).

In einer Parkanlage kommen hauptsächlich die Baumarten Ahorn, Birke, Eiche und Linde vor. Eine Zählung ergab folgenden Baumbestand:
27 Ahornbäume, 68 Birken,
51 Eichen und 79 Linden

Stelle den Baumbestand in einem Balkendiagramm dar. Beschrifte und skaliere die Achsen passend.

Welcher Diagrammtitel passt?



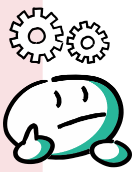


Abb. 3: Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset – Paket C (Benischek et al. 2023, S. 168).

Schmidinger et al. (2016, S. 60) fassen die Wirksamkeit der FLB folgendermaßen zusammen: Während FLB auf Klassenebene positive Wirkung auf das Lernen aller Schüler:innen, besonders auf jenes der leistungsschwächeren, zeigt, können auf Ebene von standardisierten Testungen empirisch keine Verbesserungen der Schüler:innenleistungen nachgewiesen werden, da der unmittelbare Zusammenhang zwischen Lernprozess und Ergebnisrückmeldung zur Unterstützung des Lernens fehlt und standardisierte Testungen mit ihren Ergebnissen zudem nur schwer in den Unterricht zu integrieren sind. Betont wird damit vor allem die soziale Bezugsnorm im Sinne der Durchschnittsorientierung (vgl. Abschnitt 1.).

3. Zentrale Leistungsbeurteilungen im Laufe eines Schüler:innenlebens

Im österreichischen Schulsystem werden zurzeit verschiedene Formen von standardisierten Messinstrumenten für Schüler:innenleistungen eingesetzt. Sowohl die Bildungsstandards im Zuge der sogenannten individuellen Kompetenzmessungen PLUS (iKM^{PLUS}) als auch die Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik können im Sinne der Lernzielorientierung interpretiert werden. Für den Unterricht bieten sich diese Strukturierungen des Lehrstoffs unter Einbezug von zugehörigen Lernmaterialien und freigegebenen Leistungsüberprüfungen für formative Leistungsfeststellungen an. Im Folgenden werden diese Instrumente ob ihrer Relevanz für das Thema kritisch analysiert.

Die iKM^{PLUS} wird in der 3. und 4. bzw. in der 7. Schulstufe zur Erfassung fachbezogener und zur Einschätzung fächerübergreifender Kompetenzen von Schüler:innen herangezogen. Sie lässt sich in verpflichtende und freiwillige Module untergliedern, die den jeweiligen Anforderungen der Primar- bzw. Sekundarstufe angepasst sind. Ziele dabei sind durch standardisierte curriculum-basierte Instrumente die Kompetenzen von Schüler:innen bereits ab der 3. Schulstufe sichtbar zu machen und den Lernfortschritt einzelner Schüler:innen zwischen den Erhebungszeitpunkten zu beobachten. In dieser Funktion sollen die Überprüfungen also für Schüler:innen und Lehrer:innen förder- und unterrichtswirksam werden, gleichzeitig werden die Schüler:innenleistungen einer sozialen Bezugsnorm der jeweiligen Jahrgangsgruppe im zeitlichen Verlauf unterworfen. Weiters werden mit den Erhebungen evidenzbasiert Daten für gezielte Schul- und Qualitätsentwicklung auf Systemebene unter den Stichworten „Qualitätsmanagement“ und „Bildungsmonitoring“ generiert. Im Fachbereich Mathematik werden die so genannten Basismodule durch Fokusmodule, die einen genaueren Blick auf einzelne Schüler:innen bei auffälligen Ergebnissen in den Basismodulen erlauben, und durch Orientierungsmodule auf der 5. und 9. Schulstufe zur Verschaffung eines Überblicks über den Leistungsstand der Klasse ergänzt (vgl. Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen – IQS 2022).

Die Ergebnisse der iKM^{PLUS} dürfen – laut Definition – weder Einfluss auf die Beurteilung von Schüler:innenleistungen nehmen, noch dürfen sie als Kriterium für die Aufnahme an einer weiterführenden Schule herangezogen werden. Sie dienen lediglich der individuellen Förderung von Schüler:innen (im Sinne von FLB), der Unterrichtsentwicklung, sowie der Schul- und Qualitätsentwicklung.

Kritisch sei dazu angemerkt, dass es kein gesellschaftlich ausverhandeltes Anspruchsniveau dieser Messinstrumente gibt, außer jenes der Sozialnorm über die Jahrgangsgruppe. Zudem erscheint es fraglich, ob Lehrer:innen, die die Ergebnisse der Messungen als Basis für Elterngespräche heranziehen sollen, diese auch wirklich klar von den Leistungsbewertungen im eigenen Unterricht trennen können und wollen (Problematik: Testergebnis vs. Note). Als dritter Kritikpunkt sei erwähnt, dass ein derartiges Instrument als Entscheidungsbasis für eine sehr frühe (gezielte) Selektion von Schüler:innen aufgefasst werden könnte (vgl. Gruber 2020), die in ihrem Ausschluss äußerst professionelles Lehrer:innenhandeln voraussetzt.

Im Sinne einer bildungstheoretischen Orientierung des Mathematikunterrichts legen die den iKM^{PLUS} Messungen zugrundeliegenden Bildungsstandards konkret formulierte Lernergebnisse in Form von „Könnensbeschreibungen“ fest, die als Grundlage für eine weiterführende mathematische Ausbildung bzw. für die Bewältigung von mathematischen Anforderungen, die über Alltagserfordernisse hinausgehen, hilfreich erscheinen und somit in Richtung Anschlussfähigkeit fokussieren. Als zweite Säule der bildungstheoretischen Orientierung wird die Lebensvorbereitung angeführt: Mathematik strukturiert, ordnet und gestaltet die Welt, ist sowohl Erkenntnis- als auch Konstruktionsmittel und ist ein Werkzeug zur Lösung von mathematisch modellierten Problemen (IQS 2022, S. 1). Dazu werden vier Inhalts- (Zahlen und Maße; Variable, funktionale Abhängigkeiten; Geometrische Figuren und Körper; Statistische Darstellungen und Kenngrößen) mit vier Handlungsbereichen (Darstellen, Modellbilden; Rechnen, Operieren; Interpretieren; Argumentieren, Begründen) verknüpft (IQS 2022, S. 5), und diese 16 Knoten werden mit je drei Kompetenzen aufsteigender Komplexität verbal beschrieben (IQS 2022, S. 12 ff.). Ein Beispiel dazu: zum Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“ und zum Inhaltsbereich „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ werden die Kompetenzen

„Die Schülerinnen und Schüler können

- gegebene statistische Sachverhalte (Daten) in eine (andere) mathematische Darstellung übertragen, wobei dafür das unmittelbare Einsetzen von Grundkenntnissen erforderlich ist,
- gegebene statistische Sachverhalte (Daten) in eine (andere) mathematische Darstellung übertragen, wobei dafür auch Verbindungen zu anderen mathematischen Inhalten (Begriffen, Sätzen, Darstellungen) oder Tätigkeiten hergestellt werden müssen,
- Aussagen über die Angemessenheit sowie über Stärken und Schwächen verschiedener Darstellungen (Modelle) statistischer Sachverhalte machen und bewerten.“

angeführt (IQS 2022, S. 13). Beispielaufgaben sollen diese Kompetenzen konkretisieren (Abbildung 4):

> „Die Klasse besuchen insgesamt 20 Kinder. Das Diagramm zeigt, was es heute zur Jause gibt. Wie viele Kinder essen ein Butterbrot?“

ist eine zum Knoten „Interpretieren – Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ (IQS 2022, S. 10).

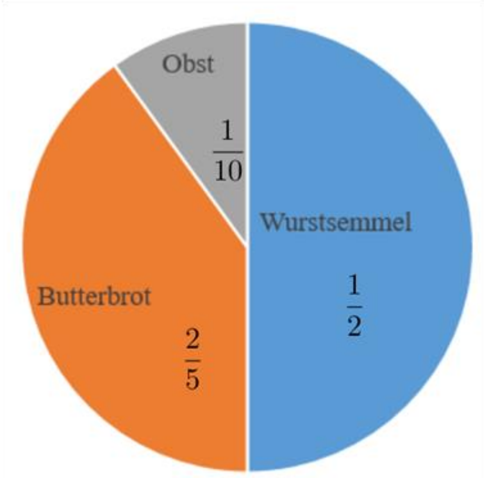


Abb. 4: Kreisdiagramm zur Beispielaufgabe.

Zur Komplexitätsdimension werden bei den Beispielaufgaben *keine* Aussagen getroffen:

> „Eine objektive Zuordnung von Aufgaben zu einem Komplexitätsbereich gestaltet sich oftmals als schwierig. Zudem erlaubt es der Umfang der iKM^{PLUS} nicht, alle 48 Knotenpunkte mit genügend Aufgaben abzubilden, um weiterhin eine genügend aussagekräftige Rückmeldung für jeden Knotenpunkt zu gewährleisten. Daher wird in der iKM^{PLUS} auf die Komplexitätsdimension verzichtet und auch in der Rückmeldung nicht weiter auf diese Dimension hingewiesen. Das Modell wird um die Komplexitätsdimension reduziert.“

(IQS 2022, S. 4). Man wird sehen, ob diese Unstimmigkeit in der realen Umsetzung zu Problemen in der Interpretation der Ergebnisse auf den verschiedenen Ebenen (Klasse, Schule, System) führen wird.

Ähnlich wie durch die Bildungsstandards für die iKM^PLUS werden für die standardisierte Reifeprüfung in Mathematik (an Gymnasien) in Österreich Grundkompetenzen als grundlegende mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten definiert. Dem Fischer'schen Konzept der Höheren Allgemeinbildung (Institut für Didaktik der Mathematik – IDM 2009, S. 8) folgend ist die Sicherung mathematischer Grundkompetenzen im Sinne einer Lebensvorbereitung im weiteren Sinn für Schüler:innen anstrebenswert:

> „Die Kommunikation zwischen Expert(inn)en und Lai(inn)en wird heute als ein zentrales Problem unserer arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft gesehen: Der mündige Bürger und die mündige Bürgerin werden in vielen Situationen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens Expert(inn)enmeinungen einholen müssen oder werden mit Meinungen von Expert(inn)en konfrontiert, die sie verstehen, bewerten und zu ihrer eigenen Erfahrungswelt in Beziehung setzen müssen, um entsprechende Entscheidungen treffen zu können."

(ebd.).

Mathematische Grundkompetenzen sind demnach für den Unterrichtsgegenstand grundlegend, längerfristig verfügbar und gesellschaftlich relevant (IDM 2009, S. 7, S. 13). Überprüft wird der Erwerb dieser Grundkompetenzen in der seit 2015 an Gymnasien in Österreich verpflichtenden standardisierten schriftlichen Reifeprüfung, die einen wesentlichen Bereich mathematischer Kompetenzen gesetzeskonform abbildet. Mit dem Ziel der Sicherung mathematischer Grundkompetenzen bildet der Grundkompetenzkatalog einen Ausgangs- und Bezugspunkt eines nachhaltig ausgerichteten Unterrichts und einer zeitgemäßen lernförderlichen Leistungsbeurteilung im Unterrichtsgegenstand Mathematik (vgl. [https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik]). In diesem Sinne wurden Grundkompetenzen im Rahmen der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik in sogenannten Teil 1-Aufgaben abgeprüft, wobei jede Aufgabe auf eine bestimmte Grundkompetenz fokussiert. Laut LBVO (2016) konnten Schüler:innen bis 2019 ein Genügend erreichen, wenn die

> „nach Maßgabe des Lehrplanes gestellten Anforderungen in der Erfassung und in der Anwendung des Lehrstoffes sowie in der Durchführung der Aufgaben in den wesentlichen Bereichen überwiegend erfüllt"

(LBVO 2016, Beurteilungsstufen (Noten)) wurden. Konkretisiert wurde dies so, dass im Teil 1 eines Prüfungstermins mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst werden mussten (für jede richtig gelöste Teil 1-Aufgabe gibt es einen Punkt), um die Arbeit positiv bewerten zu können.

Gesellschaftlich war dieser Transfer der Notendefinition auf die definierten Grundkompetenzen nicht haltbar:

> „**Ungerechte Form der Beurteilung:** […] Im Extremfall kann man sogar mit 16 von 48 Punkten (33,3%) ein Genügend, aber auch mit 35 von 48 (72,9%) Punkten ein Nicht genügend erhalten."

[https://www.openpetition.eu/at/petition/online/zentralmatura-in-mathematik-wir-wollen-eine-reform, Hervorhebung im Original]. Die Rechnung resultiert daraus, dass man theoretisch 15 Punkte aus Teil 1 und 20 von 24 Punkten aus dem viel komplexeren Teil 2 der standardisierten Reifeprüfung lukrieren konnte. (Vier Punkte in Teil 2 wurden als sogenannte „Ausgleichspunkte" gekennzeichnet, die Teil 1 zugerechnet wurden, wenn das zum Erreichen einer positiven Note nötig war.) Tatsächlich ist das u. W. nie vorgekommen.

Auch das Konzept „Grundkompetenz" ist aufgeweicht worden. Sie haben ursprünglich als nicht mehr teilbar gegolten. Nun können bei manchen Teil 1-Aufgaben auch halbe Punkte (!) vergeben werden: Abbildung 5. Die zur Aufgabe in Abbildung 5 gehörende Grundkompetenz lautet:

> „quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können"

[https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik].

Weiters ist „Textlastigkeit" den komplexeren Teil 2-Aufgaben vorgeworfen worden:

Parameter einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + k \cdot x + 4 \cdot k = 0$ mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die zwei unterschiedlichen Werte k_1 und k_2 von k, für die die gegebene Gleichung genau eine Lösung hat.

k_1 = ______________________________

k_2 = ______________________________

[0/½/1 P.]

Abb. 5: Teil 1-Aufgabe 3 des Wintertermins 2020/21 Mathematik an AHS vom 12. Jänner 2022 [https://www.matura.gv.at/downloads/download/wintertermin-2020-21-mathematik-ahs].

> „**Nachteil für sprachlich schwächere Schüler und Schülerinnen:** Die Schwierigkeit der Teil 2 Aufgaben liegt häufig in der Überfrachtung mit Text, mathematisch werden jedoch bloß Grundkompetenzen geprüft."

[https://www.openpetition.eu/at/petition/online/zentralmatura-in-mathematik-wir-wollen-eine-reform, Hervorhebung im Original]. Ein „Paradebeispiel" ist die Teil 2-Aufgabe 3 „Blutgruppen" des Haupttermins 2015 Mathematik an AHS vom 11. Mai 2015. Der Einleitungstext lautet:

> „Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (–) unterschieden. A– bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ."

[https://www.matura.gv.at/downloads/download/haupttermin-2014-15-mathematik-ahs, Hervorhebungen im Original]. Es folgen drei Kreisdiagramme und zwei Tabellen, die die Verteilung der Blutgruppen mit den Rhesusfaktoren in verschiedenen Populationen zeigen und die (Nicht-)Verträglichkeit zwischen den Blutgruppen bei Transfusionen. Die Angabe umfasst eine A4-Seite (ebd.).

Vohns et al. (2019) haben daraufhin die Angabetexte über mehrere Jahrgänge bei der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik an AHS mit jenen der BHS, mit jenen des bayerischen Zentralabiturs, mit jenen der Deutschmatura an AHS in Österreich, mit dem ersten Kapitel eines Harry Potter-Bandes und mit einem Standard-Mietvertrag verglichen. Dabei stellte sich heraus, der Anteil an Bildungssprache bei den AHS-Angaben höher ist als bei jenen in den BHS oder in Bayern, niedriger aber als in Deutsch oder bei dem Mietvertrag (!). Davon ist wieder der Anteil an nichtmathematischer Bildungssprache deutlich höher als in Bayern, aber in etwa so wie in den BHS (deren Mathematikmatura niemals in der öffentlichen Kritik stand). Schließlich ist eine hohe (durchschnittliche) Anzahl an Worten bei den Angaben der AHS festgestellt worden (Vohns et al. 2019, S. 105). Diese Ergebnisse passen gut zur (ursprünglich) intendierten Höheren Allgemeinbildung, die eine

> „Betonung *elaborativer Verständniselemente*, im Sinne einer flexiblen Anwendung mathematischen Wissens in unterschiedlichen, auch weniger vertrauten außermathematischen Kontexten, […] (also eine bestimmte Spielart von dem, was man international gemeinhin als ‚mathematical literacy' bezeichnen würde) […]"

(Vohns et al. 2019, S. 96, Hervorhebung im Original) als Kernelement mit sich bringt.

Um die Lesbarkeit der untersuchten Texte vergleichen zu können, wurde der Lesbarkeitsindex gSMOG (Simple Measure of Gobbledygook – german) herangezogen (Vohns et al. 2019, S. 102). Wenig überraschend stellen Vohns et al. (2019, S. 106) fest:

> „Erwartungsgemäß gilt der Text von ‚Harry Potter und der Stein der Weisen' (Kapitel 1) gemäß gSMOG als klar weniger anspruchsvoll (5.74), der Mietvertrag als klar anspruchsvoller (11.54) wie sämtliche Gesamtprüfungstexte."

Tiefergehende Analysen in Vohns et al. (2019, S. 107) zeigen weiters, dass

> „in Summe festzuhalten [ist], dass sich weder insgesamt, noch unter Kontrolle von Prüfungsjahrgang, mathematischem Inhaltsgebiet, Aufgabenformat und/oder Kontextbereich signifikante Zusammenhänge zwischen der empirischen Aufgabenschwierigkeit und (a) Anteil/Anzahl bildungs- und fachsprachlicher Elemente, (b) Anteil/Anzahl nicht textueller Elemente (Formeln, Grafiken), (c) standardisierter Lesbarkeit [bezogen auf den Lesbarkeitsindex Simple Measure of Gobbledygook – german; Anmerkung S. G.] oder (d) Anzahl sprachlicher Schwierigkeiten […] nachweisen lassen (Niveau jeweils $p < 0.05$, sowohl für Pearson- als auch für Rang-Korrelationen)."

Es konnte nur ein signifikanter (wenn auch schwacher) Zusammenhang zwischen Textlänge und Schwierigkeit von offenen Aufgaben (empirische Lösungshäufigkeit) festgestellt werden (12% Varianzaufklärung, Rangkorrelation $r = 0.35$ in Vohns et al. (2019, S. 108)).

Um das Anspruchsniveau der Aufgabenstellungen bei der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik an AHS vergleichen zu können, wurde das so genannte O-M-A-Modell (Operieren, Modellieren, Argumentieren) konzipiert (Siller et al. 2019). Damit werden den Aufgaben Handlungsbereiche und die Kompetenzstufen

1. Ausführen einer Handlung durch unreflektiertes Nachvollziehen
2. Ausführen einer Handlung nach Vorgabe
3. Ausführen einer Handlung nach Einsicht
4. Selbstständige Prozesssteuerung

(vgl. dazu Meyer 2007) zugeordnet, um eine Einschätzung des „Schwierigkeitsgrads" eines Prüfungstermins treffen und Prüfungstermine über die Jahre hinweg vergleichen (kriteriale Bezugsnorm: Abschnitt 1.) zu können (Siller et al. 2019). Aufgaben auf der vierten Kompetenzstufe werden nicht eingesetzt.

In Fuchs (2017) haben $n = 6$ Lehrer:innen die Teil 2-Aufgaben des Haupttermins 2016 nach dem O-M-A-Modell geratet. Unter den zu bewertenden 24 Teilaufgaben gab es nur bei einer (!) eine vollständige Übereinstimmung. Bei einer Teilaufgabe wurden gar alle drei (!) Handlungsbereiche genannt: Abbildung 6. Die Aufforderung in dieser Teilaufgabe erfordert Operieren (Differenzieren) und Interpretieren, welches sowohl als innere Argumentation als auch als Modellieren einer Realsituation gemäß dem O-M-A-Modell aufgefasst werden kann.

Die Auswertung des Ratingergebnisses zeigt dementsprechend ein $\kappa_{\text{mit Stufung}} = 0.28$ (Berücksichtigung der Kompetenzstufen) und ein $\kappa_{\text{ohne Stufung}} = 0.48$ (nur die Zuordnung zu den Handlungsbereichen wurde berücksichtigt) bei sieben Rater:innen, denn die Zuordnung des Ministeriums wurde ebenfalls berücksichtigt (Fuchs 2017, S. 39 ff.). Als Gründe für diese mangelnde Übereinstimmung kann das Fehlen des Handlungsbereiches „Interpretieren" und die fehlende Vertrautheit mit der Klassifizierung von Aufgaben nach Handlungen vermutet werden (Fuchs 2017, S. 65).

Aufgabe 1

Intercity-Express (ICE)

Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und Bremstests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden.

b) Bei einem Bremstest werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg $s(t)$ entnehmen: $s(t) = 70 \cdot t - 0{,}25 \cdot t^2$ mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern ab Bremsbeginn.

Geben Sie die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v_2 für den Bremstest in Form von $v_2(t) = k \cdot t + d$ an und deuten Sie die auftretenden Parameter k und d im gegebenen Kontext!

Abb. 6: Ausschnitt aus der Teil 2-Aufgabe 1 des Haupttermins 2016 Mathematik an AHS vom 10. Mai 2016 (Lösungshäufigkeit 0.53 nach Fuchs (2017, S. 43)) [https://www.matura.gv.at/downloads/download/haupttermin-2015-16-mathematik-ahs].

4. Inhaltliche Anregungen zum Differenzieren im Mathematikunterricht

Differenzierter Unterricht kann zur individuellen Förderung von Schüler:innen im Sinne der formativen Leistungsbewertung beitragen:

> „Die Studie gibt durch ihre empirischen Befunde Hinweise darauf, dass formative Diagnostik eng mit der Gestaltung eines differenzierten Unterrichts verknüpft ist.“

(Schmidt 2020, S. 230). Grob wird in der Literatur beim differenzierten Unterricht zwischen innerer und äußerer Differenzierung unterschieden (Hußmann & Prediger 2007, S. 1). Zum Beispiel eine Aufteilung in Leistungsgruppen entspricht einer äußeren Differenzierung. Innere Differenzierung dagegen spielt sich in einer Lerngruppe ab und erfordert didaktische Strategien, um unterschiedliche Wissensstände, Motivationen, etc. entsprechend zu berücksichtigen. Zwei Herangehensweisen haben sich dabei etabliert: bei der *geschlossenen Differenzierung* wird von der Lehrkraft ein Spektrum an Arbeitsaufträgen (z. B. Aufgaben) angeboten, so dass jedes Mitglied der Klasse die Möglichkeit hat, ein individuelles Programm zu wählen (z. B. Stationenbetrieb). Unterschiedliche schwierigkeitsgenerierende Merkmale für die Erstellung bzw. Analyse von Aufgaben („Standard-Differenzierungsstrategien vieler Lehrkräfte“ nach Prediger (2008)) sind (Hußmann & Prediger 2007, S. 2; vgl. auch Drüke-Noe 2018; Prediger, 2008):

- Art der kognitiven Aktivitäten: z. B. explorieren, Muster und Zusammenhänge entdecken, formulieren, verallgemeinern, begründen, argumentieren
- technische Kompliziertheit der Ausführung des Lösungsplanes: Wie groß und technisch kompliziert ist der Rechenaufwand (z. B. Größe der Nenner)?
- Komplexitätsgrad: Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?
- sprachliche Komplexität der Aufgabenstellung: Welche Hürden im Textverständnis müssen überwunden werden?

- Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung und der geforderten Lösung: Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen? Wie vertraut sind diese?
- Vorstrukturiertheit bzw. Offenheit der Lösung: Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?
- Bekanntheitsgrad der Mittel: abhängig von Positionierung im Lernprozess

Allgemein geht es um unterrichtliche Strategien, die darauf ausgelegt sind, der Unterschiedlichkeit der Lernenden durch geeignete Lernarrangements gerecht zu werden, um eine optimale Förderung aller Schüler:innen auf deren individuellen Niveaus zu erreichen. Differenzierung hat also nicht zum Ziel, aus einer heterogenen Gruppe eine möglichst homogene Gruppe zu machen, sondern allen Jugendlichen die Möglichkeit zu eröffnen, sich ihren Voraussetzungen entsprechend bestmöglich zu entwickeln (Bruder & Reibold 2012, Abschnitt 2): Abbildung 7. Dies ist selbstredend eine enorm hohe Anforderung an Unterricht und kann die „Leistungsschere weiter auseinanderklaffen“ (Hußmann & Prediger 2007, S. 2) lassen.

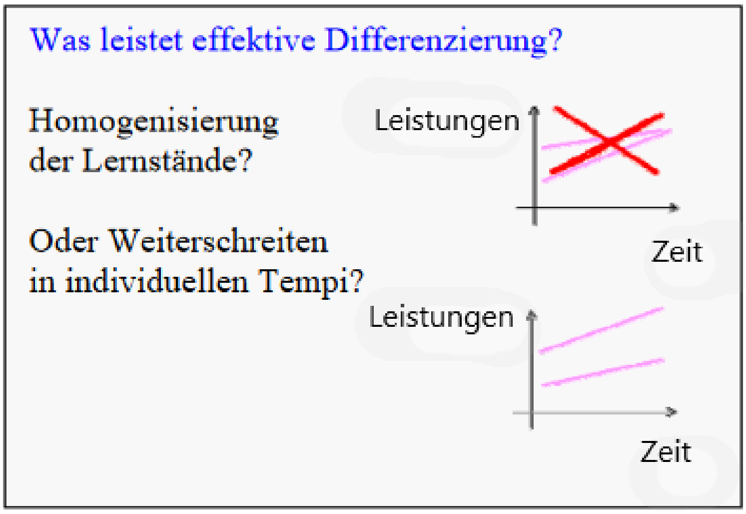


Abb. 7: [http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-PM-H17-Hussmann-Prediger-Differenzieren-Webfassung.pdf] (adaptiert).

Als Nachteil der geschlossenen Differenzierung wird der große Arbeitsaufwand für die Lehrkraft beim Erstellen der Aufgaben genannt, und als Vorteil die Möglichkeit, klare Erwartungshorizonte festzusetzen (Prediger 2008).

Zum Explorieren, Muster und Zusammenhänge Entdecken und Verallgemeinern eine Aufgabe: Finde möglichst viele Stammbrüche, deren Summe wieder ein Stammbruch ist! Das Beispiel $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ist leicht durchschaubar und kann zu $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$ für eine natürliche Zahl $n>1$ verallgemeinert werden. Damit steigt natürlich auch der Grad der Formalisierung. Die Rechnung $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ gibt schon mehr zu denken – vor allem: wie kommt man darauf? Die Subtraktion $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ klärt auf (die Idee stammt von der Betrachtung einer Teleskopsumme). Last but not least eine weitere Steigerung der Schwierigkeit: $\frac{1}{6}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$. Der Ansatz $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}$ führt auf die Bedingung $a\cdot b=n^2$. Dabei sind a, b und n natürliche Zahlen größer null. Für jedes n zieht die Festsetzung $b=1$ die Lösung $a=n^2$ nach sich. Im Falle von $n=6$ gibt es auch andere zulässige Belegungen für a und b: $n^2=6^2=36=9\cdot 4$, also zum Beispiel $a=9$ und $b=4$. Die drei Lösungen zeigen unterschiedliche Komplexitätsgrade der Lösungswege. Diese Aufgabe kann auch als ein Beitrag zum Problemlösen im Mathematikunterricht im Handlungsbereich *Darstellen, Modellbilden* und in den Inhaltsbereichen *Zahlen und Maße* und *Variable, funktionale Abhängigkeiten* angesehen werden. Im Kompetenzmodell des neuen

Lehrplans Mathematik für die Sekundarstufe 1 [https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lehrplaene-neu/materialien-zu-den-unterrichtsgegenst%C3%A4nden.html] heißt es dazu auf S. 2 (Hervorhebung im Original):

> „**Problemlösen** meint das Bearbeiten innermathematischer Aufgabenstellungen, die für Schülerinnen und Schüler keine Routineaufgaben sind, insbesondere, wenn ihnen (noch) kein passendes Lösungsverfahren bekannt ist."

Abbildung 8 zeigt bildhaft eine „Barriere", die individuell vorhanden sein kann bei einer gegebenen Problemlöseaufgabe oder eben nicht (Bruder & Collet 2011, S. 11). Sie muss jedenfalls überwunden werden, um zu einer Lösung zu gelangen. Kennt man den „Trick", so ist jede Problemlöseaufgabe keine mehr.

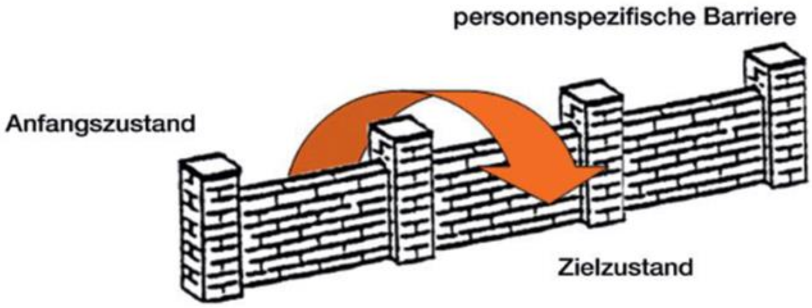


Abb. 8: [https://epub.jku.at/obvulihs/content/titleinfo/2751436/full.pdf].

In Posamentier & Krulik (2008, p. 20) finden wir:

> "The sum of two numbers is 12, and the product of the same two numbers is 4. Find the sum of the reciprocals of the two numbers."

Der Trick ist hier gleich $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{12}{4}=3$ auszurechnen, und nicht das (nichtlineare) Gleichungssystem $\begin{matrix} x+y=12 \\ x\cdot y=4 \end{matrix}$ anzusetzen, welches nicht reelle Lösungen *x* und *y* mit sich bringt.

Unterschiedliche Grade der Formalisierung zeigen Abbildung 9 (Höhensatz im rechtwinkeligen Dreieck) und die Rechnung

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\frac{1}{4}\cdot(a^2+2ab+b^2)-ab=\frac{1}{4}\cdot(a^2-2ab+b^2)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geq 0$$

für einen Beweis der Mittelungleichung $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ für positive reelle Zahlen a und b. Bei beiden Zugängen „sieht" man: Gleichheit ist genau dann der Fall, wenn $a=b$ gilt.

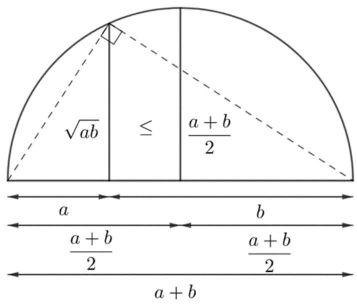


Abb. 9: Von Kmhkmh - Eigenes Werk, CC-BY 4.0, [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=83943038].

Im Kompetenzmodell des neuen Lehrplans Mathematik für die Sekundarstufe 1 heißt es dazu auf S. 2 (Hervorhebung im Original):

> „**Begründen** meint das Anführen von Argumenten bzw. das Bilden von Argumentationsketten, um eine Vermutung bzw. Behauptung zu bestätigen oder zu widerlegen."

Es werden bei dieser Aufgabe also der Handlungsbereich *Argumentieren, Begründen* und die Inhaltsbereiche *Variable, funktionale Abhängigkeiten* bzw. *Geometrische Figuren und Körper* angesprochen.

Ein letztes Beispiel zur geschlossenen Differenzierung zeigt unterschiedliche sprachliche Komplexitäten: Abbildung 10 aus Plath (2020, S. 249).

hohe linguistische Komplexität	Bei einem Spendenlauf der Santander Bank nehmen 4000 Schüler, für die jeweils ein Betrag von 10 Euro gespendet wird, und 1200 Erwachsene, für die jeweils 5 Euro gespendet werden, teil. Die Teilnahmegebühr, welche zur Hälfte für die Verpflegung der Teilnehmer verwendet und zur anderen Hälfte ebenfalls in die Spendensumme einfließt, beträgt für Schüler 6 Euro und für Erwachsene 12 Euro. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.	**Kilometer für den guten Zweck** 04.05.2015, Westdeutsche Zeitung Beim Spendenlauf, welcher von der Santander Consumer Bank und der Stadt Mönchengladbach organisiert wird, nimmt auch Joey Kelly teil. Joey, der ehemals Musiker war und jetzt Extremsportler ist, gerät richtig ins Schwärmen und sagt: „Ich habe schon an vielen Läufen teilgenommen, aber der Spendenlauf in Mönchengladbach ist nicht nur einer der größten in Deutschland, sondern einer der bestorganisierten in Europa, sodass ich es kaum erwarten kann." Joey Kelly, der schon in den vergangenen Jahren das Aushängeschild des Laufs war, wird am Sonntag, den 14. Juni, nicht nur Medaillen an die besten Läufer verteilen, sondern auch selbst die Laufschuhe schnüren, um mit 4000 sportbegeisterten Schülern sowie 1200 erwachsenen Läufern die Stadt unsicher zu machen. Während Grundschüler 1,3 Kilometer laufen, können auch Strecken von 5 Kilometern oder 10 Kilometern absolviert werden. Nach dem Start der Grundschüler um 10:30 Uhr, ertönt der Startschuss für den Jedermann-Lauf über fünf Kilometer und den Hauptlauf, welcher von Oberbürgermeister und Schirmherr Hans Wilhelm Reiners abgegeben wird, erst nachmittags. Start- und Zielpunkt ist die Santander Bank am gleichnamigen Platz. Abgerissen werden die Kilometer jedoch nicht nur für eine persönliche Bestzeit, vielmehr beträgt der Spendenbetrag, den die Santander Bank einem guten Zweck widmet, pro teilnehmendem Schüler 10 Euro und für jeden anderen Teilnehmer 5 Euro. Die Teilnahmegebühr, welche zur Hälfte für die Verpflegung der Teilnehmer verwendet wird und zur anderen Hälfte ebenfalls in die Spendensumme einfließt, beträgt für Erwachsene 12 Euro und für Schüler 6 Euro. Im vergangenen Jahr, als 4800 Schüler mitliefen, kamen so über 60.000 Euro zusammen. Auch das Rahmenprogramm abseits der Strecke, bestehend aus einer Hüpfburg, Kinderschminken sowie zahlreichen Verkaufsständen mit verschiedenen Leckereien, lockt viele Besucher an. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.
niedrige linguistische Komplexität	Die Santander Bank veranstaltet einen Spendenlauf für einen guten Zweck. Sie spendet für jeden der 4000 teilnehmenden Schüler 10 Euro. Für jeden der 1200 teilnehmenden Erwachsenen spendet sie 5 Euro. Schüler zahlen für die Teilnahme 6 Euro. Erwachsene zahlen 12 Euro. Die Hälfte dieser Gelder wird für die Verpflegung der Läufer verwendet. Den Rest spendet die Santander Bank ebenfalls. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.	**Kilometer für den guten Zweck** 04.05.2015, Westdeutsche Zeitung Der Spendenlauf in Mönchengladbach wird von der Santander Consumer Bank und der Stadt organisiert. An dem Lauf nimmt auch Joey Kelly teil. Der ehemalige Musiker ist inzwischen Extremsportler. Er gerät richtig ins Schwärmen und sagt: „Ich habe schon an vielen Läufen teilgenommen. Der Spendenlauf in Mönchengladbach ist nicht nur einer der größten in Deutschland. Er ist auch einer der bestorganisierten in Europa. Ich kann es kaum erwarten". Wie schon in den vergangenen Jahren ist er das Aushängeschild des Santander-Spendenlaufs. Am Sonntag, den 14. Juni, wird Joey Kelly die Medaillen an die besten Läufer verteilen. Außerdem wird er selber teilnehmen. Mit ihm laufen 4000 sportbegeisterte Schüler und 1200 erwachsene Läufer. Insgesamt können die Läufer drei verschiedene Strecken absolvieren. Die Grundschüler laufen 1,3 Kilometer. Alle anderen können 5 oder 10 Kilometer laufen.Die Grundschüler starten ihren Lauf um 10:30 Uhr. Der Jedermann-Lauf über 5 Kilometer und der 10-Kilometer Hauptlauf starten erst nachmittags. Oberbürgermeister Hans Wilhelm Reiners gibt hierbei das Zeichen für den Start. Er ist zusätzlich Schirmherr des Spendenlaufs. Alle Läufer starten und enden an der Santander Bank am gleichnamigen Platz. Die Läufer laufen jedoch nicht nur für eine persönliche Bestzeit. Die Santander Bank spendet pro Schüler 10 Euro für einen guten Zweck. Für jeden anderen Teilnehmer spendet sie 5 Euro. Erwachsene zahlen für die Teilnahme 12 Euro. Schüler zahlen 6 Euro. Die Hälfte dieser Gelder wird für die Verpflegung der Läufer verwendet.Den Rest spendet die Santander Bank ebenfalls. Im vergangenen Jahr liefen 4800 Schüler bei dem Lauf mit. Es kamen über 60.000 Euro Spenden zusammen. Auch abseits der Strecke wird den Zuschauern viel geboten. Zahlreiche Stände verkaufen verschiedene Leckereien, schminken Kinder und bieten eine Hüpfburg an. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.
	niedrige situationale Komplexität (Textaufgaben)	*hohe situationale Komplexität (Zeitungsartikelaufgaben)*

Abb. 10: Ein Thema unterschiedlich sprachlich dargestellt (Plath 2020, S. 249).

Sogenannte selbstdifferenzierende Aufgaben sind das Herzstück der *offenen Differenzierung*. Sie sind so konzipiert, dass der:die Lernende selbst entscheiden kann, auf welchem Niveau und in welchem Umfang er:sie die Aufgabe bearbeitet. Dabei arbeiten die Lernenden durchgehend an denselben Fragen. Eine Herausforderung für die Lehrenden besteht dabei darin, die Lernenden anzuhalten, tatsächlich auf ihrem Niveau zu arbeiten (Hußmann & Prediger 2007, S. 2).

Ein reichhaltiges Aufgabenfeld mit mannigfachen (offenen) Differenzierungsmöglichkeiten ist zum Beispiel die Erstellung von Füllgraphen bzw. -funktionen. Sie beschreiben die zeitliche Entwicklung der Füllhöhe in einem bestimmten Gefäß, wenn dieses mit konstanter Füllgeschwindigkeit (d. h. das pro Zeiteinheit hinzukommende Flüssigkeitsvolumen ist konstant) mit einer Flüssigkeit (z. B. Wasser) befüllt wird.

> „Füllgraphen werden oft genutzt, um Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen zu erarbeiten und zu festigen. Dabei vernetzen sie räumliche Vorstellungen mit graphischen Darstellungen über funktionale Zusammenhänge."

(Lambert & Hilgers o. J.). Grundvorstellungen funktionalen Denkens sind der

- Zuordnungsaspekt: jedem Wert eines Bereiches wird ein bestimmter Wert zugeordnet;
- Kovariationsaspekt: gemeinsames Änderungsverhalten zweier Werte;
- Objektaspekt: Operationen wie z. B. den Graphen verschieben (Barzel 2009, S. 13).

Das Zitat

> „Die Chance, Mathematik mit Erfahrungen zu verbinden, sollte man […] nutzen, denn Erkenntnisse, die aus einem enaktiven Erleben erwachsen, bleiben auch nachhaltiger im Gedächtnis."

(Barzel 2009, S. 10) motiviert einen haptischen Zugang zur Thematik: es werden Zeiten und (zugehörige) Füllstände gemessen und so der Füllgraph punktweise konstruiert (Zuordnungsaspekt). (Bei komplizierten Gefäßformen ist das oft sogar die einzige Möglichkeit.)

Einfache (rotationssymmetrische) Gefäßformen wie Zylinder lassen das Konstruieren eines Füllgraphen „als Ganzes" zu (Objektaspekt). Abbildung 11 zeigt zwei Beispiele aus Lambert & Hilgers (o. J.). Die linke Figur in Abbildung 11 zeigt den vertikalen Querschnitt zweier Zylinder, wobei der Durchmesser der Grundfläche des oberen Zylinders halb so groß ist wie jener des unteren. Sie sind zudem gleich hoch. Daraus können wir folgern, dass die Füllzeit des oberen Zylinders ein Viertel der Füllzeit des unteren beträgt. Aufgrund der Geometrie von Zylindern können wir außerdem schließen, dass der Füllgraph dem Graphen einer linearen Funktion entspricht: in gleichen Zeiten werden gleiche Flüssigkeitsvolumina zugeführt, da sich die Querschnittsfläche eines Zylinders nicht ändert, muss dies Hand in Hand mit konstanten Höhenzuwächsen einhergehen. Auf halber Höhe muss der Füllgraph einen Knick aufweisen, die Füllhöhenzunahme (und damit die Steigung des Füllgraphen) vervierfacht sich „schlagartig".

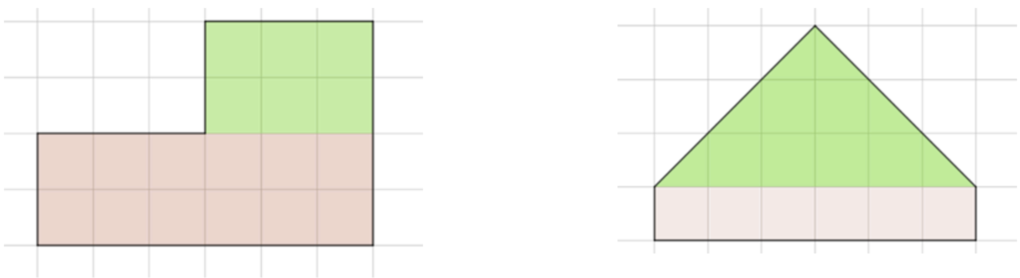


Abb. 11: Zwei zu füllende Gefäße bestehend aus Zylinder und Kegel.

Ganz anders ist die Situation bei der rechten Figur in Abbildung 11. Zuerst stellen wir im Vergleich zur linken Figur fest, dass der Zylinder rechts halb so groß ist wie der Basiszylinder links in Abbildung 11.

Das bedeutet, dass die Füllzeit des linken unteren Zylinders doppelt so lang ist wie die Füllzeit des rechten unteren. Nun zum aufgesetzten Kegel: Er hat die dreifache Höhe des Basiszylinders, daher das gleiche Volumen wie er und damit dieselbe Füllzeit. Der Übergang von Zylinder zu Kegel weist keinen Knick auf, weil die Abnahme des Kegeldurchmessers mit der Höhe stetig verläuft. Denken wir uns den Kegel bei halber Höhe durchgeschnitten, dann hat der obere Kegel ein Achtel des Volumens des ganzen Kegels. Das hat zur Folge, dass das Befüllen bis zur halben Kegelhöhe $\frac{7}{8}$ der Füllzeit für den ganzen Kegel benötigt. An der Spitze des Kegels wird das zu füllende Volumen „unendlich klein", das heißt der Füllgraph wird am Ende eine senkrechte Steigung besitzen.

Der Kovariationsaspekt kommt bei der analytischen Behandlung des Themas zum Tragen, zum Beispiel beim Befüllen eines Kegelstumpfes. Dieser habe die Höhe H und die beiden Radien r_1 des Basiskreises und r_2 der Deckfläche. Es gilt $r_1 < r_2$. Die Volumsformel des Kegelstumpfes ist $V = \frac{H\pi}{3} \cdot ({r_1}^2 + r_1 \cdot r_2 + {r_2}^2)$. Eine elementare Herleitung dieser Formel für die Sekundarstufe 1 findet sich in Sergi & Götz (2023). Das eingefüllte Flüssigkeitsvolumen hat natürlich dieselbe Form, allerdings ändert sich der Radius r der Deckfläche linear mit der Füllhöhe h: $r(h) = \frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1$ für $0 \leq h \leq H$. Damit ist $V(h) = \frac{h\pi}{3} \cdot \left({r_1}^2 + r_1 \cdot \left(\frac{r_2-r_1}{H} \cdot h + r_1\right) + \left(\frac{r_2-r_1}{H} \cdot h + r_1\right)^2\right)$ das Füllvolumen in Abhängigkeit der Füllhöhe (Zuordnungsaspekt). Interessant ist aber die Umkehrfunktion h, sie kann mittels eines CAS bestimmt werden: Abbildung 12. Im Nenner steht ein Ausdruck, der negativ ist. Daher muss auch der Zähler negativ sein. Händisches Umformen liefert schließlich $h(V) = \frac{H}{r_2 - r_1} \cdot \left(\sqrt[3]{r_1^3 + \frac{3V(r_2-r_1)}{\pi H}} - r_1\right)$.

Bei komplexen Umformungen kann also das Zusammenspiel von Technologie und Erkennen von Termstrukturen fruchtbar und erkenntnisbringend sein. Wegen $V = v_f \cdot t$, wobei v_f die konstante Fließgeschwindigkeit ist, kann die zeitabhängige Höhenfunktion $t \to h(t)$ leicht aus $V \to h(V)$ gewonnen werden (Sergi 2022, Abschnitt 6.6). Einen Ausschnitt aus einem dazu passenden GeoGebra-Applet zeigt Abbildung 13.

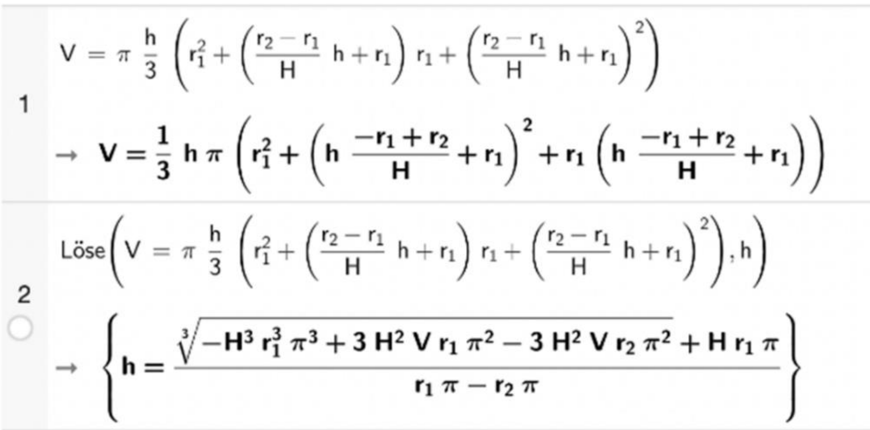


Abb. 12: Die Lösung des CAS.

Im Sinne des Spiralprinzips kann diese Aufgabe auch mit Hilfe der Integralrechnung (Volumen von Rotationskörpern) behandelt werden (Sergi 2022, S. 77). Für $r_1 = 0$ mutiert der zu füllende Stumpf zu einem auf der Spitze stehenden Kegel usw. usf.

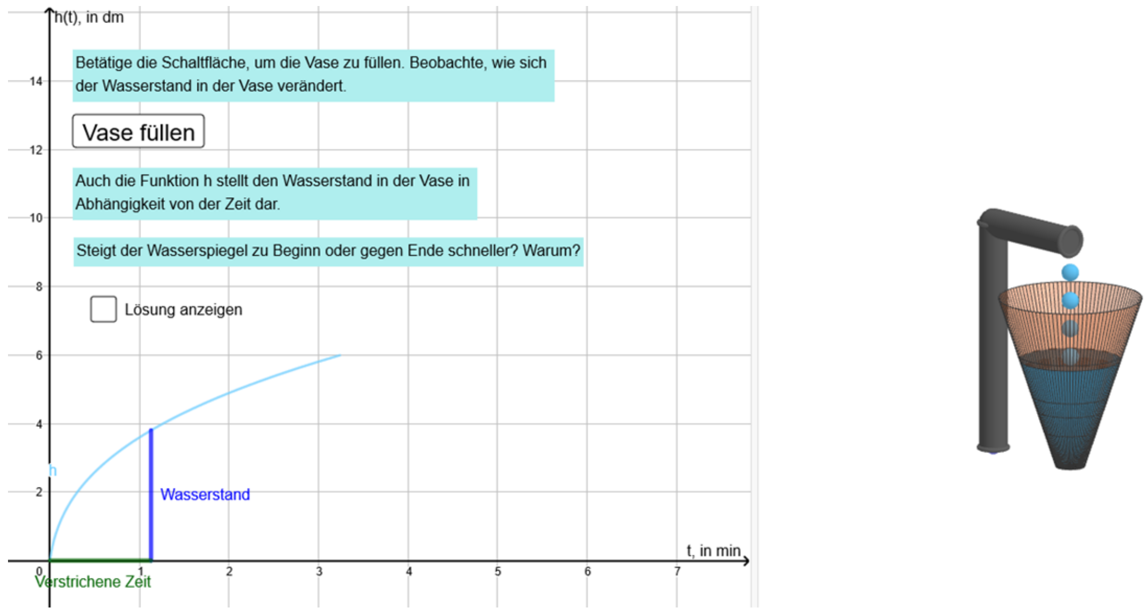


Abb. 13: GeoGebra-Applet von Laura Sergi [https://www.geogebra.org/m/e2crshz5].

„Blütenaufgaben" stellen eine weitere Möglichkeit innerer Differenzierung im Mathematikunterricht dar. Folgende Qualitätsanforderungen werden an sie gestellt:

- „Die Blütenaufgabe hat einen in sich geschlossenen Kontextbezug.
- Ein Erwartungshorizont muss erstellt werden.
- Die ersten Teilaufgaben sind Grund- und Umkehraufgaben […].
- Der Kontext wird unter verschiedenen Blickwinkeln betrachtet und schrittweise langsam variiert […].
- Eine komplette Öffnung ist nicht zwingend erforderlich.
- Der Ausführungsaufwand der Teilaufgaben darf nicht zu hoch sein."

[https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/makos/downloads/Steckbrief_Bluetenaufgaben.pdf]. Ein Beispiel dazu:

„Jeansgrößen werden in inch angegeben und nicht in cm. Du musst wissen: 1 inch entspricht 2,54 cm.

a) Die erste Zahl gibt den Taillenumfang (W) an. […] Wie viel cm beträgt der Taillenumfang bei der Größe W 30?
b) Lena sagt: „Ich habe Größe 25." Ihr Maßband zeigt 63,5 cm. Hat sie richtig gerechnet?
c) Du jobbst in einem Laden. Lege eine Tabelle an, um schnell die richtige Größe zu finden. Runde dazu die Ergebnisse auf ganze cm.
d) Was müsstest du rechnen, wenn du die Größe in cm weißt und die Größe in inch brauchst?
e) Peter behauptet: Wenn ich eine Zahl mit einer Dezimalzahl multipliziere, ist das Produkt immer größer als die ursprüngliche Zahl."

(ebd., Hervorhebung im Original, Nummerierung angepasst).

Ein (Zwischen-)Resümee lautet: Eine Herausforderung stellt sich dabei, die Lernenden zu motivieren, ihrem Niveau entsprechend zu arbeiten (etwa bei einem Aufgabenset wie in den Abbildungen 1 bis 3 nicht immer nur die einfachen Aufgaben auszuwählen). Andererseits kann es natürlich auch passieren, dass leistungsschwache Schüler:innen die Offenheit nützen und sich auch einmal an einer aufwendigeren Aufgabenstellung versuchen. Bruder & Reibold (2012, S. 74 f., Hervorhebungen im Original) nennen drei didaktische Kernelemente für offene Differenzierung:

- „Unterstützung der *Selbstregulation* (Zielklarheit und Zielbildung, Selbsteinschätzung),
- Differenzierte *Ausgangsniveausicherung* (Basiswissen und -können wachhalten und entstandene Lücken füllen),

- Differenzierte *kognitive Aktivierung* (bei der Erkenntnisgewinnung und beim Festigen)."

Insgesamt ist eine Balance zwischen geschlossener und offener Differenzierung anzustreben, die sowohl inhaltlich als auch methodisch (siehe nächster Abschnitt) im Zuge der Unterrichtsplanung begründet werden kann: Eine Kombination beider Herangehensweisen der inneren Differenzierung kann abhängig von der jeweiligen Lernsituation sinnvoll sein (Hußmann & Prediger 2007, S. 2).

5. Methodische Hinweise

Es bedarf diagnostischer Fähigkeiten der Lehrkraft, um die individuellen Lernvoraussetzungen aufzuspüren und um differenzierende, passende Aufgabenstellungen zu stellen (Leuders & Prediger 2012). Auf diese Weise kann an Vorerfahrungen der Schüler:innen angeknüpft werden. Vertrautheit mit statistischen Diagrammen aus den Medien zum Beispiel kann der Verknüpfung des Inhaltsbereichs „Statistische Darstellungen und Kenngrößen" mit dem Handlungsbereich „Interpretieren" förderlich sein (Abbildung 14).

Abb. 14: DerStandard online vom 13.04.2022 [https://www.derstandard.at/story/2000134884018/von-40-bis-175-prozent-wie-der-gaspreisanstieg-haushalte-unterschiedlich].

Unterschiedliches Vorwissen zu einem bestimmten Thema in einer Klasse kann zu verschiedenen Unterrichtsmethoden innerhalb dieser Klasse nach einer Gruppeneinteilung führen. Die Aptitude Treatment Interaction-Forschung beschäftigt sich allgemein damit, für ausgewählte Schüler:innenmerkmale die jeweils passende Unterrichtsmethode zu finden, um bestimmte Lernziele zu erreichen. Aptitude Treatment Interaction bedeutet dabei in etwa „Fähigkeits-Lehrmethoden-Zusammenhang". Zum Beispiel erhalten Schüler:innen mit geringerem (unzureichendem) Vorwissen Lernmaterial A (z. B. ausgearbeitete Lösungsbeispiele), Schüler:innen mit mehr relevantem Vorwissen erhalten Lernmaterial B (z. B. Problemlöseaufgaben). Ist der angenommene Zusammenhang zwischen Lernvoraussetzung und Lernangebot tatsächlich der Fall, so erzielen die Schüler:innen mit den für sie jeweils passend zugeteilten Lernmaterialien (A oder B) bessere Lernerfolge als ohne diese Differenzierung: Abbildung 15 (Friesen et al. 2022, S. 6) .

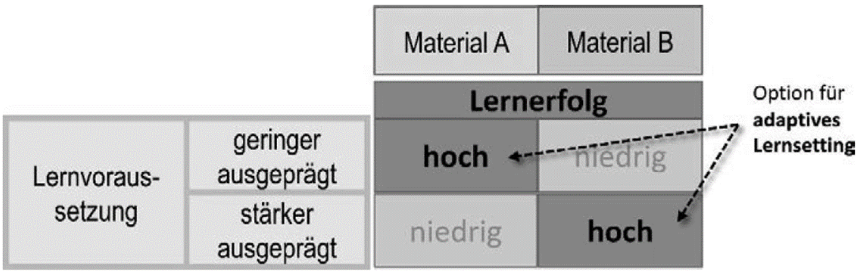


Abb. 15: An Fähigkeiten von Schüler:innen angepasste Lehrmethoden (Friesen et al. 2022, S. 6).

Die personelle Ausformung des Differenzierens innerhalb der Klasse geschieht durch flexibles Gruppieren, welches nur in bestimmten Unterrichtsphasen durchgeführt wird: Abbildung 16 (Friesen et al. 2022, S. 13). Der Einstieg orientiert sich an der thematischen Lerneinheit und die dafür formulierten Lernziele, für die unterschiedliche Lernvoraussetzungen relevant sein können. Sind die erwarteten, auf Erfahrung basierenden oder festgestellten (Vortest) Unterschiede in den Lernvoraussetzungen sehr groß, so sollte das vorgesehene Lernmaterial für verschieden ausgeprägte Voraussetzungen angepasst werden, so dass jede Lerngruppe adäquates Lernmaterial zur Verfügung hat. Zum Beispiel wird die Lerngruppe mit den schwächeren Voraussetzungen mit zusätzlichen Hilfestellungen oder Strukturierungen ausgestattet, die bei der stärkeren Gruppe entfallen (Friesen et al. 2022, S. 7). Für das Systematisieren und Sichern des Unterrichtsertrages wird die Gruppeneinteilung innerhalb der Klasse wieder aufgehoben, ebenso in Phasen des Prüfens und (gemeinsamen) Reflektierens (Abbildung 16).

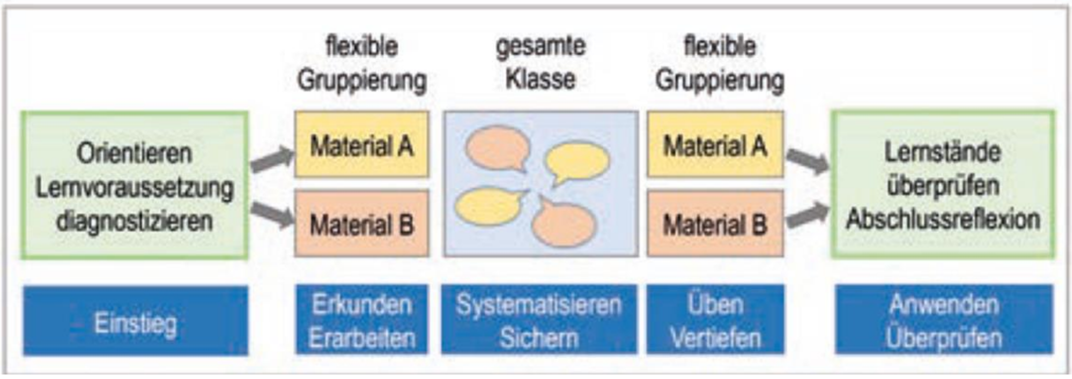


Abb. 16: Flexibles Gruppieren in bestimmten Unterrichtsphasen (Friesen et al. 2022, S. 13).

Für die Planung eines Stundenaufbaus gemäß Abbildung 16 müssen folgende Fragen beatwortet werden (Friesen et al. 2022, S. 13 f.):

1. „Was ist das gemeinsame Lernziel der Unterrichtseinheit? […]
2. Welche Lernvoraussetzung ist für das Erreichen des Lernziels relevant?“
    a. fachlich
    b. z. B. Selbstregulation beim offenen, problemorientierten Arbeiten
3. „Wie wird die relevante Lernvoraussetzung erfasst? […]
4. Wie wird das Lernmaterial gestaltet? […]
5. In welchen Unterrichtsphasen wird flexibel gruppiert?“

Bleiben wir bei dem Beispiel Vorwissen (gemeint sind Kompetenzen bezogen auf Wissen und Können) als eine in einer Klasse unterschiedlich ausgeprägte Lernvoraussetzung für ein neues Thema, dazu kommt noch aufgrund methodischer Planung (geschlossene Differenzierung) die mehr oder minder vorhandene Fähigkeit zur Selbstregulation (Punkt 2. b. oben). Um diese individuell und praxisnah zu erfassen, schlagen Lacher et al. (2022, S. 46) folgende Skala vor: Abbildung 17. Jedes Item wird mit Punkten bewertet: 0 – stimmt gar nicht, 1 – stimmt eher nicht, 2 – stimmt eher, 3 – stimmt vollkommen. Die Punktzahlen der fünf Items werden addiert. Als ein Maß für das Vorwissen kann die letzte Zeugnisnote in Mathematik für jede:n Schüler:in ins Auge gefasst werden. Nun bildet man für beide Faktoren eine Rangliste in der Klasse (eventuell bzw. wahrscheinlich mit vielen Bindungen), dann werden die beiden Rangpunkte für jede:n Schüler:in addiert und daraus eine Gesamtrangliste erstellt. Diese definiert eine Zweiteilung der Klasse (ebd.).

Nach Lacher et al. (2022, S. 48) geben wir folgende Beispielaufgabe:

> „Wie viele Stücke sollte eine rechteckige Schokolade haben, damit du sie auf möglichst viele verschiedene Anzahlen von Personen gerecht aufteilen kannst?“

Item	Beschreibung
SR1	Das Kind überlegt beim Lesen der Aufgabe, welches Vorgehen (Strategie) ihm beim Lösen helfen könnte.
SR2	Das Kind überlegt sich beim Lesen der Aufgabe, was das Ziel der Aufgabe ist.
SR3	Das Kind überlegt sich während des Bearbeitens der Aufgabe, ob es schon nahe an der Lösung ist.
SR4	Wenn das Kind nicht weiterkommt, wechselt es sein Vorgehen (Strategie).
SR5	Am Ende überprüft das Kind, ob seine Lösung stimmen kann.

Abb. 17: Fünf Items zur individuellen Erfassung der Selbstregulationskompetenz von Schüler:innen (Lacher et al. 2022, S. 46).

Für Lernmaterial A können wir zum Beispiel diese Fragen bzw. Aufforderungen als ergänzendes Unterstützungsmaterial ansehen:

> „Überlege dir zuerst …
> … Was ist im Text mit ‚verschiedene Anzahlen von Personen‘ gemeint? […]
> … Mache 5 verschiedene Beispiele. Welche davon sind gute Lösungen und wieso?
> … Verändere die Anzahl [der, Anm. S. G.] Stücke der Schokolade systematisch, z. B. 20, 30 , 40 etc. Was stellst du fest?
> … Stelle eine Vermutung über die Anzahl [der, Anm. S. G.] Stücke auf und überprüfe sie mit verschiedenen Beispielen.“

(ebd.).

Lacher et al. (2022, S. 49) skizzieren dazu einen hypothetischen Lernverlauf (Abbildung 18). Die erste Aufforderung von soeben betrifft die Vorausschau: ist alles klar verständlich? Werden schon Verfahren von früher ins Auge gefasst, um diese Aufgabe zu lösen? Die nächsten beiden Aufforderungen bzw. Fragen zielen auf die Steuerung der eingesetzten Strategie(n) ab. Die letzte Aufforderung dient der Überprüfung der erzielten Ergebnisse und sie kann weiters den Beginn der Reflexion einleiten.

Die beiden Faktoren „Vorwissen“ und „Selbstregulation“ beeinflussen das Lernergebnis bzw. den Lernfortschritt beim selbstständigen Bearbeiten von Aufgaben zum Thema „Teiler und Vielfache“ (vgl. die Beispielaufgabe von eben, die dem Problemlösen zuzuordnen ist) durch Schüler:innen signifikant (Lacher et al. 2022, S. 44 f.). Das Lernergebnis setzt sich dabei aus inhaltlichem Wissen und heuristischen Fähigkeiten zusammen. Letztere wiederum zeigen sich beim Strukturieren und Überprüfen des Lernvorganges (vgl. Abbildung 18), sind also wichtige Elemente der Selbstregulation von Schüler:innen beim Problemlösen. In Abbildung 19 sind die quantitativen Ergebnisse dargestellt. Zur Auswertung wurden robust gerechnete multivariate Regressionsmodelle eingesetzt. Die Breite der Pfeile und angegebenen Zahlen in Abbildung 19 entsprechen den standardisierten Regressionskoeffizienten (ß-Koeffizienten), je breiter der Pfeil, desto größer der Einfluss. Die statistische Signifikanz der Regressionen der

Faktoren werden mit einem Stern ($p < 0.05$) oder zwei Sternen ($p < 0.01$) angegeben. Die Änderungen in Wissen und Heuristik wurden mit Hilfe eines Vor- und eines Nachtests gemessen (ebd.).

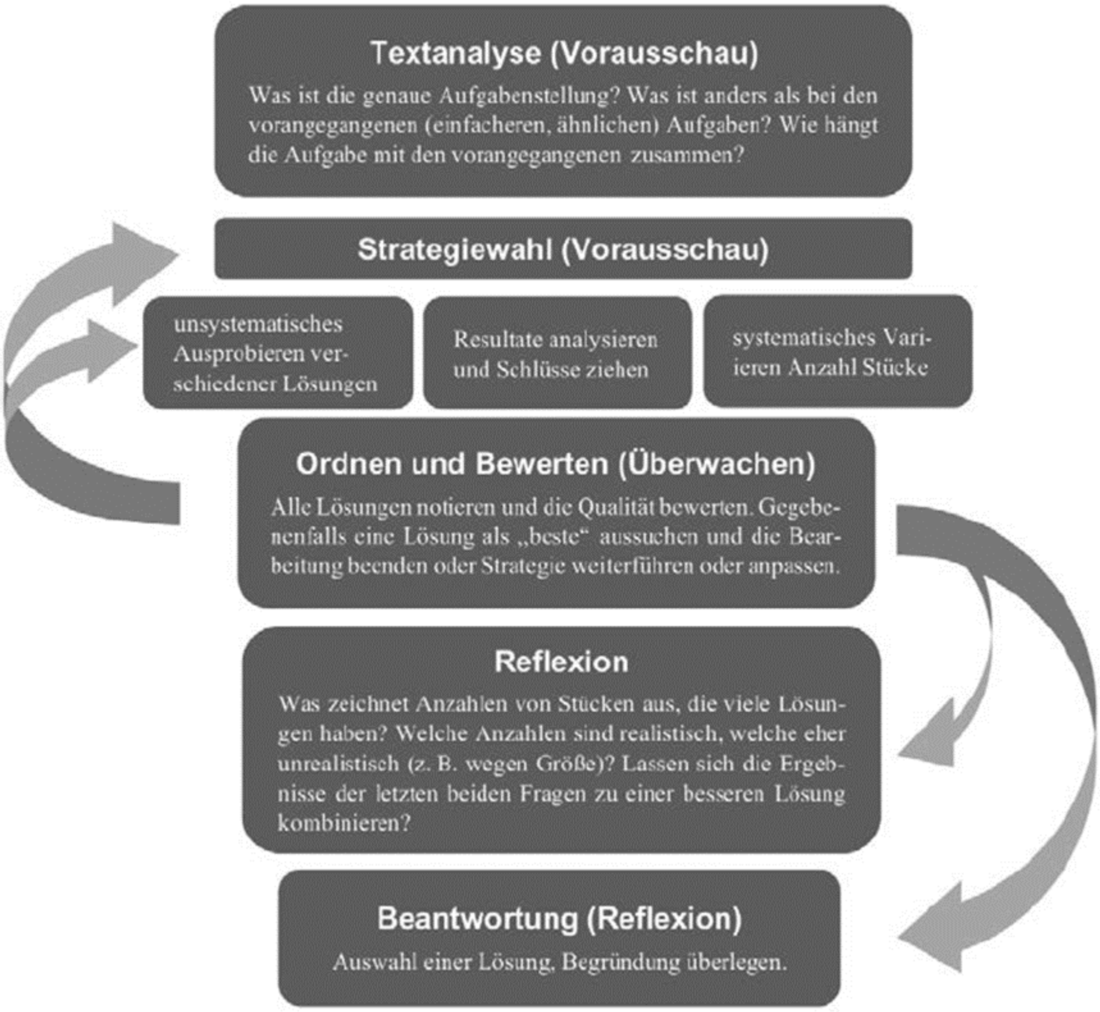


Abb. 18: Hypothetischer Lernverlauf zur „Schokoladenaufgabe“ (Lacher et al. 2022, S. 49).

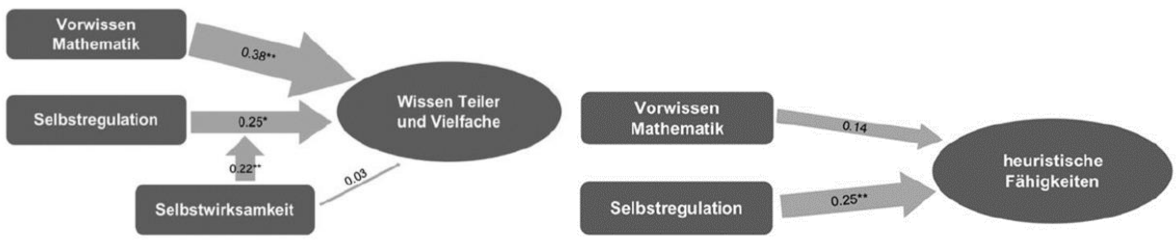


Abb. 19: Einfluss der Faktoren „Vorwissen“ und „Selbstregulation“ auf Wissenszuwachs und heuristische Fortschritte, Angabe der Regressionskoeffizienten (* signifikant, ** hochsignifikant) (Lacher et al. 2022, S. 45).

Reflexionsanlässe schaffen ist eine andere Möglichkeit, Differenzierung im Unterricht anzubieten: Kreis- oder Ringdiagramme etwa eignen sich nicht zur Darstellung von Merkmalen mit vielen Ausprägungen, werden aber sehr wohl publiziert (Abbildung 20). Als mögliche Alternative bieten sich (auf Basis realer Daten selbst erstellte) Balkendiagramme an (Abbildung 21). Dieses Beispiel spricht also den Inhaltsbereich „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ und den Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“ an.

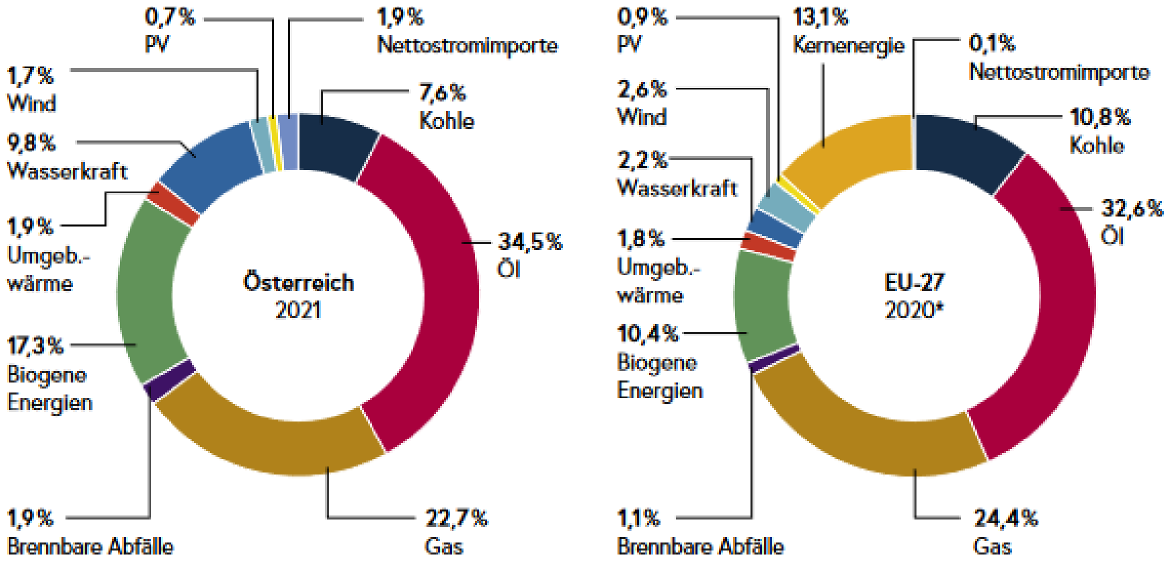


Abb. 20: Bruttoinlandsverbrauch von Energie im Vergleich Österreich – EU [https://www.bmk.gv.at/themen/energie/publikationen/zahlen.html].

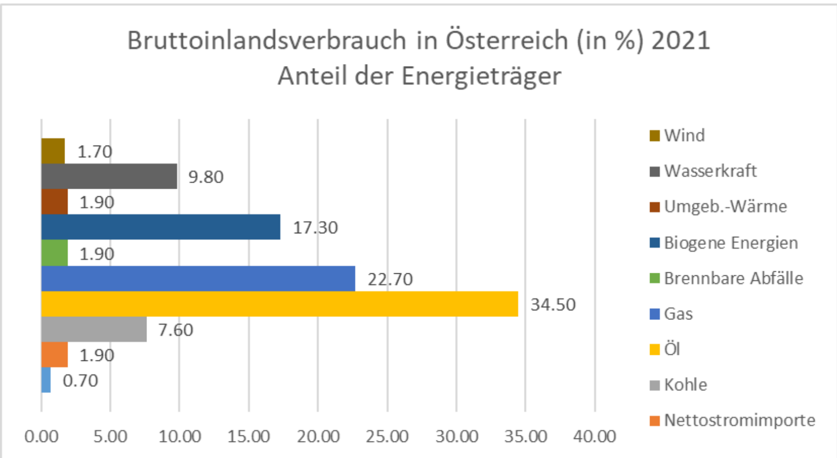


Abb. 21: Balkendiagramm als Alternative zum Ringdiagramm bei vielen Merkmalsausprägungen.

Für den Inhaltsbereich „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ zum Beispiel reicht das Handlungsspektrum vom Darstellen kleiner, vorgegebener Datenmengen („Darstellen, Modellbilden“) bis zum Vergleichen konkurrierender Diagrammtypen in komplexen statistischen Situationen („Argumentieren, Begründen“). Das ergibt eine breite Differenzierungspalette.

Beim Erkunden neuer Themen sind gestufte Impulse der Lehrenden eine Methode, Elemente der Differenzierung in den Unterricht einfließen zu lassen. Ein Beispiel ist das (Unter-)Suchen der Möglichkeiten, geometrische Figuren in der Ebene so zu transformieren, dass sie deckungsgleich bleiben. Abbildung 22 zeigt einen Ausschnitt eines dazu passenden GeoGebra-Applets. Der Inhaltsbereich „Geometrische Figuren und Körper“ und der Handlungsbereich „Rechnen, Operieren“ werden durch gestufte Impulse von „einer Möglichkeit“ zu „mehreren“ bis zu „allen“ miteinander fruchtbar in Beziehung gesetzt (Hußmann & Prediger 2007, S. 3).

Entlang der Behandlung von Teilbarkeitsregeln in den natürlichen Zahlen können

- das Experimentieren mit Beispielen,
- das Untersuchen von Spezialfällen,
- das Finden von Gemeinsamkeiten („Rechnen, Operieren“),
- das Formulieren von Sätzen („Darstellen, Modellbilden“)
- bis zum Begründen derselben („Argumentieren, Begründen“)

Stationen differenzierten Unterrichts sein.

Aufgaben für das Erkunden sollen also so gestaltet bzw. ausgewählt werden, dass vielfältige Lösungswege, alternative Repräsentationen oder Begründungen auf verschiedenen Abstraktionsstufen möglich sind.

Weitere Unterstützungsmaßnahmen für differenzierten Unterricht sind von Seiten der Lehrenden geeignete Lehrimpulse, regelmäßige Aufforderungen zu Zwischenreflexionen (Lerntagebücher) oder das Bereitstellen von vorstellungsunterstützenden Materialien (Leuders & Prediger 2012).

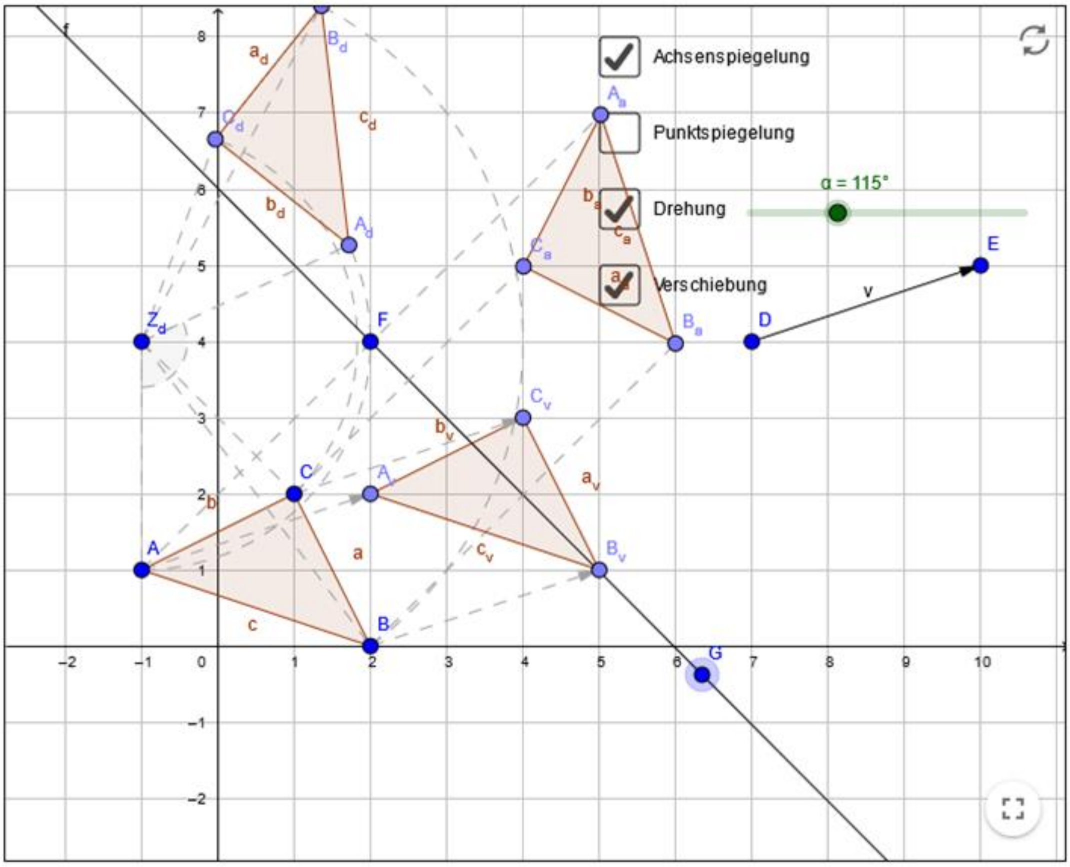


Abb. 22: Kongruenzabbildungen in der Ebene von eckerts [https://www.geogebra.org/m/gPe7wSut].

Nach den Eigenaktivitäten von Schüler:innen sollten nach einem konstruktivistischen Verständnis von Lernen ein Austausch und eine Reflexion der verschiedenen Zugänge, Erfahrungen und Resultate stattfinden. Dazu können zum Beispiel sogenannte Strategiekonferenzen „einberufen“ werden. Strategiekonferenzen dienen dem Austausch verschiedener Zugänge, Erfahrungen und Resultate. Dabei werden individuelle Ideen gesammelt und unterschiedliche Herangehensweisen systematisiert.

Eine Gleichung kann zum Beispiel auf verschiedene Arten gelöst werden:

- durch (systematisches) Probieren,
- durch Anwenden eines Lösungsverfahrens,

- (oder näherungsweise durch Iterieren eines Approximationskalküls)

(„Variable, funktionale Abhängigkeiten“ und „Rechnen, Operieren“).

Stochastische Probleme können durch

- das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten,
- durch kombinatorisches Abzählen von Fällen oder
- durch Simulation

analysiert werden.

Von der Lehrperson wird eine Zielorientierung vorgegeben: auf welcher Stufe

- welche Strategie,
- welcher Inhalt,
- welche Begründung etc.

von den Lernenden erworben werden soll. Dabei ist die Zugänglichkeit für alle unbedingt notwendig: auch für die leistungsschwächeren Schüler:innen muss es möglich sein, den Beiträgen der anderen zu folgen (Leuders & Prediger 2012, Abschnitt 2.3). Eine mögliche Stufung könnte sein:

- eine tragfähige Strategie sicher beherrschen,
- wissen, dass es auch noch andere gibt,
- Beherrschung mehrerer Strategien,
- bewusstes Wählen zwischen Strategien

(Leuders & Prediger 2012, S. 48 f.; Hußmann & Prediger 2007, S. 6).

> „Nachhaltiges konzeptuelles Wissen, das insbesondere die Vorstellungen und Darstellungen umfasst, muss jeweils für alle Niveaus gesichert werden, dagegen ist ausdifferenziertes Abgrenzungswissen (wann kann ich statt diesem Verfahren günstiger ein anderes anwenden?) und weitgreifende Vernetzungen (der Satz ist unter Berücksichtigung der Nebenbedingung x ein Spezialfall von y) eher für die Stärkeren zu konsolidieren.“

(Leuders & Prediger 2012, S. 52).

Das Transferieren von Strategien in neue, nicht vertraute Situationen schließlich stellt den Gipfel mathematischen Handelns im Unterricht dar. Das ist die Herausforderung des Mathematikunterrichts schlechthin! Impulse von Lehrer:innenseite können hierbei differenzierend wirken:

- Untersuche nur einen bestimmten Spezialfall!
- Triff erst Vereinfachungen und rechne dann!
- Selektiere zwischen verschiedenen Fällen!

Dazu kann die Lehrerin bzw. der Lehrer einen Aufgabensatz vorgeben, dessen Items nach Schwierigkeitsgrad geordnet werden sollen. So kann die Leistungsfähigkeit einer einzelnen Person eruiert werden und für die Lehrperson und die Schüler:innen Orientierung geschaffen werden (Hußmann & Prediger 2007, S. 6). Das Formulieren selbsterstellter Aufgaben, die jeweils vom Sitznachbarn bzw. von der Sitznachbarin gelöst werden müssen, ist eine weitere Möglichkeit, das Erwerben dieser Kompetenz in den Mathematikunterricht einfließen zu lassen.

6. Fazit

Die Ausführungen sollen anregen, über Leistungsbeurteilung im schulischen Kontext aber auch in gesellschaftlicher Hinsicht nachzudenken. Formative Leistungsbewertung erweist sich als effektives Instrument zur Förderung der Lernprozesse von Schüler:innen, wenn diese sowohl prozess- als auch produktorientiert eingesetzt wird und kriteriale, ergänzt um individuelle Bezugsnormen in den Vordergrund stellt – der Einsatz von am sozialen Durchschnitt orientierten Messinstrumenten ist aus mehreren Gründen hinterfragenswert. In der LBVO-Novelle des Bildungsministeriums wird unter dem Paradigma der Kompetenzorientierung die „Verankerung einer beurteilungsfreien formativen Leistungsrückmeldung neben der summativen Leistungsbeurteilung, um individuelle Lernprozesse durch zielgerichtete und konstruktive Rückmeldung zu unterstützen", gefordert [https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lbvo-novelle.html].

Differenzierende Aufgaben spielen in diesem Sinne eine wesentliche Rolle, setzen aber diagnostische Kompetenz von Lehrkräften einerseits in der Aufgabenauswahl (Inhalts- und Handlungsbereich, Textverständnis, Komplexitätsgrad, Anspruchsniveau, …) und andererseits im Bereich der Lernstandsdiagnose (unter Einbezug einer Potentialabschätzung) voraus. Dazu kommen (weitere) fachdidaktische Kompetenzen wie z. B. die Kenntnis von Fehlvorstellungen oder das Erstellen eines individuellen Förderprogrammes.

Moser Opitz (2022, S. 222) spricht von einem zirkulären Prozess des komplexen Zusammenhangs von diagnostischem und didaktischem Handeln, der durch Urteilsbildung und didaktische Entscheidung verbunden ist. Schmidinger et al. (2015, S. 62 f.) geben diesbezüglich in Anlehnung an William (2013) fünf Schlüsselstrategien für die Umsetzung einer effektiven FLB an:

- Lernziele und Erfolgskriterien mit den Lernenden klären,
- effektive Diskussionen, Aktivitäten und Aufgaben arrangieren, die zu beobachtbaren Lernergebnissen führen,
- Feedback geben, das das Lernen voranbringt,
- Schülerinnen und Schülern ermöglichen, einander als Ressource zu nutzen,
- Schüler:innen als Verantwortliche ihres eigenen Lernens anerkennen.

Literatur

Arnold, K.-H., Lindner-Müller, C. (2009): Leistungsüberprüfungen und -beurteilungen. In: Blömeke, S.; Bohl, T.; Haag, L.; Lang-Wojtasik, G.; Sacher, W. (Hrsg.): *Handbuch Schule*. *Theorie – Organisation – Entwicklung* (S. 323–331). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Barzel, B. (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In: Leuders, T.; Hefendehl-Hebeker, L.; Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente* (S. 6–17). Berlin: Cornelsen.

Benischek, I., Hauer-Typpelt, P., Sattlberger, E., Steinlechner-Wallpach, G. (2023): *Mathe 1*. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Bloom, B. S. (1969): Some theoretical issues relating to educational evaluation. In: Tyler, R. W. (Ed.): *Educational evaluation: new roles, new mean* (the 68th yearbook of the National Society for the Study of Education, Part II, pp. 26–50). University of Chicago Press.

Bruder, R., Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Bruder, R., Reibold, J. (2012): Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In: Lazarides, R.; Ittel, A. (Hrsg.): *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 67–92). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Drüke-Noe, C. (2018): Einfach – mittel – schwierig … Wenn das so einfach wäre: Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades entwickeln. In: *mathematik lehren* 209, 9–12.

Eder, F., Neuweg, G. H., Thonhauser, J. (2009): Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung. In: Specht, W. (Hrsg.): *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2009* (Band 2: Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen, S. 247–267). Graz: Leykam. Online: https://www.iqs.gv.at/downloads/bildungsberichterstattung/nationaler-bildungsbericht-2009 (Zugriff: 3. 5. 2023).

Friesen, M., Leuders, T., Loibl, K. (2022): Differenzieren im Mathematikunterricht: Forschungsbasiert und praxisrelevant zugleich?! In: *Der Mathematikunterricht* 68(2), 4–17.

Fuchs, C. (2017). *Kompetenzorientierte Analyse von Typ-2-Aufgaben nach dem O-M-A-Modell.* Universität Wien: Diplomarbeit. Online: https://utheses.univie.ac.at/detail/42089# (Zugriff: 3. 5. 2023).

Gruber, K. H. (2020): *Bildungspolitische Glühwürmchen*. DerStandard am 11.1.2020. Online: https://www.derstandard.de/story/2000113159783/bildungspolitische-gluehwuermchen (Zugriff: 31.8.2023).

Hußmann, S., Prediger, S. (2007): Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. In: *Praxis der Mathematik in der Schule,* 49(17), 1–8. Online: https://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-PM17-Hussmann-Prediger-Differenzieren-Vorabfassung.pdf (Zugriff: 2. 6. 2023, Vorabfassung).

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS) (2022): *Mathematik in der iKM^{PLUS} im Detail. Konstrukt und Kompetenzmodell. Sekundarstufe*. Online: https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/ikm-plus-sekundarstufe/lehrpersonen (Zugriff: 3. 5. 2023).

Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) (Hrsg.) (2009): *„Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*. Universität Klagenfurt. Online: https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/sRP-M_September_2009-2.pdf (Zugriff: 3. 5. 2023).

Lacher, M., Künsting, J., Leuders, T., Wessel, L. (2022): Erkunden und Entdecken – ertragreich für Lernende mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen. In: *Der Mathematikunterricht* 68(2), 40–51.

Lambert, A., Hilgers, A. (o. J.). *Füllgraphen – wie man sieht!* Online: https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/funktionen/funktionale-zusammenhaenge-zwischen-fuellgraph-und-gefaess-erkunden/ (Zugriff: 8. 5. 2023).

LBVO (2016). *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Leistungsbeurteilungsverordnung*, Fassung vom 22.12.2016 (RIS). Online: https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009375&FassungVom=2016-12-22 (Zugriff: 3. 5. 2023).

Leuders, T., Prediger, S. (2012): „Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In: Lazarides, R.; Ittel, A. (Hrsg.): *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–65). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Meyer, H. (2007): *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Moser Opitz, E. (2022): Diagnostisches und didaktisches Handeln verbinden: Entwicklung eines Prozessmodells auf der Grundlage von Erkenntnissen aus der pädagogischen Diagnostik und der Förderdiagnostik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik,* 43(1), 205–230. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00201-1.

Neuweg, G. H. (2019): *Kompetenzorientierte Leistungsbeurteilung. Pädagogische und rechtliche Hilfestellungen für die Schulpraxis*. Linz: Trauner Verlag.

Plath, J. (2020). Verstehensprozesse bei der Bearbeitung realitätsbezogener Mathematikaufgaben: Klassische Textaufgaben vs. Zeitungstexte. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 41(2), 237–266. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00148-w.

Posamentier, A. S., Krulik, S. (2008): *Problem-solving strategies for* efficient *and* elegant *solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher*. 2nd ed. Thousand Oaks: Corwin Press.

Prediger, S. (2008). Mit der Vielfalt rechnen – Aufgaben, Methoden und Strukturen für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht. Online Version des Kapitels in Hußmann, S.; Liegmann, A.; Nyssen, E.; Racherbäumer, K.; Walzebug, C. (Hrsg.): *Indive – Individualisieren, Differenzieren, Vernetzen*. Hildesheim: Franzbecker. Online: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-Indive-Differenzieren.pdf (Zugriff: 4. 5. 2023).

Schmidinger, E., Hofmann, F., Stern, T. (2016): Leistungsbeurteilung unter Berücksichtigung ihrer formativen Funktion. In: Bruneforth, M.; Eder, F.; Krainer, K.; Schreiner, C.; Seel, A.; Spiel, C. (Hrsg.): *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2015* (Band 2: Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen, S. 59–94). Graz: Leykam. Online: https://www.iqs.gv.at/themen/bildungsberichterstattung/nationaler-bildungsbericht-2015 (Zugriff: 3. 5. 2023).

Schmidt, C. (2020). *Formatives Assessment in der Grundschule. Konzept, Einschätzungen der Lehrkräfte und Zusammenhänge.* Wiesbaden: Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26921-0.

Sergi, L. (2022): *Das Erstellen von* GeoGebra-*Applets und ihre Anwendungsmöglichkeiten in der 9. Schulstufe AHS.* Universität Wien: Masterarbeit. Online: https://utheses.univie.ac.at/detail/62449/ (Zugriff: 23. 5. 2023).

Sergi, L., Götz, S. (2023): Filling vessels: An exciting way to investigate functional dependencies. In: *North American GeoGebra Journal* 11(1), 35–47. Online: https://mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/199 (Zugriff: 9. 5. 2023).

Siller, H.-S., Bruder, R., Linnemann, T., Sattlberger, E., Steinfeld, J., Hascher, T. (2019): Kompetenzstufenzuordnungen – mögliches Entscheidungskriterium zur Mathematikaufgaben-Auswahl bei einer standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019, 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (für die GDM herausgegeben von Frank, A.; Krauss. S.; Binder, K.) (S. 1073–1076). Münster: WTM. Online: https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/38706/1/BzMU19_SILLER.pdf (Zugriff: 4. 5. 2023).

Vohns, A., Obereder, T., Egger, J., Scheiber, S. (2019): Textverständnis oder mathematisches Verständnis: Was macht Aufgaben der AHS-Zentralmatura Mathematik schwierig? In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG* 52, 93–112. Online: https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2019%20Band%2052/VortragVohnsOberederEggerScheiber.pdf (Zugriff: 3. 5. 2023).

William, D. (2013): Assessment: The Bridge between Teaching and Learning. In: *Voices from the Middle* 21(2), 15–20.

Verfasser:innen

Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar Morgenstern-Platz 1
1090 Wien
stefan.goetz@univie.ac.at

Eva Sattlberger
KPH Wien / Krems
Institut für Ausbildung
Mayerweckstraße 1
1210 Wien
eva.sattlberger@kphvie.ac.at

Raumvorstellung als eine zentrale Kognition für die Zahlenverarbeitung und das Rechnen sowie deren Einordung in das mathematikdidaktische Grundvorstellungskonzept

KARL-HEINZ GRASS, GRAZ

Zahlen und räumliches Vorstellungsvermögen sind für die meisten von uns zwei getrennte Bereiche, mit wenigen, bis keinen Interferenzen. Denken Sie an die Rechenaufgabe 3+8 und an eine simple Würfeldrehaufgabe, wie sie oft bei Intelligenztests oder auch im Quiz-Teil von Zeitschriften vorkommt. Der vorliegende Beitrag geht der Frage nach, warum die Fähigkeit solche Würfeldrehaufgaben zu meistern auch für das Lösen der oben genannten Rechnung von Bedeutung ist. Konkret wird der Zusammenhang zwischen Zahlenverständnis und visuell-räumlicher Kognition auf Basis bisheriger kognitions- und neurowissenschaftlicher Evidenz dargestellt und ein Bogen zum Grundvorstellungsbegriff gespannt. Letzteres dient dazu, die Relevanz von Ergebnissen aus der Bezugsdisziplin Psychologie für die Mathematikdidaktik hervorzuheben und Parallelstrukturen sichtbar zu machen.

1 Einleitung, Begriffsdefinitionen und Ziele des Beitrags

In den letzten beiden Dekaden wurden zahlreiche Ergebnisse zum Zusammenhang zwischen visuell-räumlichen Fähigkeiten (synonym dazu wird im Beitrag von Raumvorstellung gesprochen) und Mathematik im Allgemeinen publiziert (vgl. Casey et al. 1995; Verdine et al. 2017). Raumvorstellung ermöglicht es uns, mental mit räumlichen Objekten zu operieren, diese beispielsweise zu bewegen und in Beziehung zueinander zu setzen (vgl. Newcombe & Shipley 2015; Uttal et al. 2013). Da diese räumlichen Fähigkeiten im Alltag von zentraler Bedeutung sind, etwa beim Einrichten einer Wohnung oder beim Navigieren von einem Ort zu einem anderen, steht die Erforschung dieses Kognitionsbereichs seit mehr als hundert Jahren im Fokus der Psychologie (vgl. Bethell-Fox & Shepard 1988; Carroll 1993; Linn & Petersen 1985; Shepard & Metzler 1971). Historisch wurde dabei einerseits der Einfluss von Raumvorstellung auf das handwerkliche Geschick untersucht (Cox 1928; Paterson et al. 1930) und andererseits repräsentiert die Raumvorstellung von Beginn an einen Faktor der menschlichen Intelligenz (Carroll 1993; Thurstone & Thurstone 1941).

Zusammenhänge zwischen Raumvorstellung und mathematischer Leistung wurden mittlerweile in allen Altersgruppen nachgewiesen (z. B. Casey et al. 1995; Delgado & Prieto 2004; Verdine et al. 2017). Beispielsweise schneiden Grundschulkinder mit besseren Leistungen bei mentalen Rotationsaufgaben auch bei mathematischen Argumentations- und Begründungsproblematiken besser ab (Geer et al. 2019). Dasselbe Ergebnis zeigte sich bei Sekundarstufenschüler*innen (Delgado & Prieto 2004) und auch bei Studierenden im MINT-Bereich (Casey et al. 1995). Jüngere Studien von Verdine et al. (2017) sowie von Zhang et al. (2014) konnten zudem nachweisen, dass visuell-räumliche Fähigkeiten auch nach Kontrolle von domänenunspezifischen Faktoren (also Kognitionen, die nicht spezifisch für Mathematik sind) wie Intelligenz, Sprache und Exekutivfunktionen (z. B. Arbeitsspeicher) prädiktiv valide für spätere mathematische Leistungen sind.

Neben der leistungsbasierten Evidenz zum Zusammenhang zwischen Raumvorstellung und Mathematik konnte in den letzten zwanzig Jahren gezeigt werden, dass es auch kognitive und neuronale Überlappungen zwischen den beiden Bereichen gibt (Gunderson et al. 2012; Mix & Cheng 2012; Hawes & Ansari 2020). Hier wurde ob der hohen volkswirtschaftlichen Relevanz der Dyskalkulieforschung insbesondere der Zusammenhang zwischen Raumvorstellung und Zahlenverarbeitung und dem damit verbundenen Rechnen untersucht (Parsons & Bynner 2005; Gross et al. 2009; Vogel & De Smedt 2021). Auch im vorliegenden Beitrag wird dieser spezifische Zusammenhang zwischen Raumvorstellung und

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S. 65 - 86.

der Verarbeitung von Zahlen fokussiert. Zudem wird vorausgeschickt, dass es eine ausführlichere Onlineversion des Beitrags gibt, auf die im vorliegenden, kürzeren Druckartikel, an einigen Stellen verwiesen wird.

1.1 Zahlenverarbeitung und deren Basisrepräsentationen

Zahlen mögen uns zwar als eine einzige Entität erscheinen, sobald wir aber eine Zahl sehen oder hören aktivieren wir zahlreiche Basisrepräsentationen, die uns beispielsweise Auskunft über die numerische Größe der Zahl oder die Einordnung der Zahl am Zahlenstrahl geben (Nuerk et al. 2006). Beim Lösen von komplexen Rechenaufgaben müssen diese Basisrepräsentationen problemlos miteinander interagieren. Diese Zahlenrepräsentationen, die zur soliden Verarbeitung numerischer Information notwendig sind und die Basis für das spätere Rechnen darstellen, werden in der Literatur als Zahlenverarbeitung oder basisnumerische Fähigkeiten subsummiert (Landerl et al. 2022, S. 26).

Es gibt zahlreiche Modelle zur Zahlenverarbeitung, die hier nicht erschöpfend dargestellt werden (z. B. Dehaene 1992; Dehaene & Cohen 1995; McCloskey 1992; McCloskey et al. 1985; Campbell & Clark 1992; Verguts et al. 2005; Nuerk & Willmes 2004). Das wichtigste Modell, das auch hier bedient wird und die Basis vieler anderer Modelle ist, ist jenes von Stanislas Dehaene (1992; verfeinert und modifiziert in Dehaene et al. 2005). In seinem Triple-Code-Modell postuliert Dehaene drei Basisrepräsentationen von Zahlen, eine *verbale Repräsentation*, eine *visuelle Repräsentation* und eine *semantische Größenrepräsentation.*

Bei der *verbalen Repräsentation* einer Zahl geht es darum, mit dem gesprochenen oder auditiv gehörten Zahlwort, z. B. „fünf“, etwas anfangen zu können. Die verbale Repräsentation einer Zahl ist zudem in der kindlichen Entwicklung der erste Zugang zu Zahlen. Hörende Kinder zählen bereits im Vorschulalter und sagen die Zahlwortreihe bis 10 oder 100 problemlos auf, ohne die numerische Größe der gesprochenen Zahlen zu kennen. Eine Besonderheit dieser Zahlenrepräsentation ist zudem, dass ihr auch das Wissen um Multiplikationsfakten des kleinen Einmaleins zugeordnet wird. Ergebnisse zeigen, dass erwachsene Proband*innen, die Schwierigkeiten bei der Benennung von Zahlen haben, auch Probleme beim Abruf von Multiplikationsfakten aufweisen (Dehaene et al. 2005). Durch den Einsatz bildgebender Verfahren wie beispielsweise der funktionellen Magnetresonanztomographie (fMRT), wo Gehirnaktivitäten indirekt durch die Messung des Sauerstoffbedarfs erfasst werden, konnten Delazer et al. (2003) nachweisen, dass beim Abruf von Multiplikationsfakten (z. B. 3x6) andere Gehirnareale aktiv sind als bei komplexen Multiplikationen (z. B. 13x25). Dabei handelt es sich beim Abruf der Multiplikationsfakten um den linken Gyrus angularis, wo auch die verbale Verarbeitung von Zahlen verortet ist.

Unter der *visuellen Repräsentation* von Zahlen wird verstanden, dass die Ziffern 0 bis 9 als bedeutungshaltige Symbole wahrgenommen werden. Denken wir z. B. an die asiatischen Zahlzeichen, die wir nicht kennen, dann ist es einsichtig, dass das Wissen um die Bedeutung der arabischen Ziffern die Basis für das Rechnen ist. Im Unterschied zur verbalen Zahlenrepräsentation, wo der gehörten oder gesprochenen Zahl eine Bedeutung zugeordnet wird, ist es hier die in arabischen Symbolen geschriebene Zahl, der eine wohldefinierte numerische Bedeutung zugeschrieben wird. Neuroanatomisch wird die visuelle Zahlenrepräsentation im Gyrus Fusiformis bilateral angenommen (Nuerk et al. 2006, S. 148).

Die *semantische Größenrepräsentation* ermöglicht es uns, die numerische Größe einer Zahl zu verstehen. Diese Repräsentation wird automatisch nonverbal aktiviert, sobald wir eine Zahl sehen oder hören. Damit gelingt es uns, Zahlen nach deren numerischer Größe zu ordnen, zu vergleichen, Überschlagsrechnungen durchzuführen, zu schätzen oder beispielsweise auch die Position von Zahlen am Zahlenstrahl zu bestimmen. Dieser Basisrepräsentation kommt im vorliegenden Beitrag besondere Bedeutung zu, da die semantische Repräsentation räumliche Aspekte bedient. So spricht man in der Literatur vom mentalen Zahlenstrahl (*mental number line*, kurz MNL), wonach Zahlen auf einem (im mitteleuropäischen Kulturkreis von links nach rechts orientierten) Zahlenstrahl enkodiert werden (Dehaene 2013).

Hier zeigt sich, dass Zahlen einer räumlichen Repräsentation unterliegen. Graß und Krammer (2018) konnten diesbezüglich in ihrer Studie mit 102 Grundschulkindern nachweisen, dass Raumvorstellung zwar direkt und signifikant an der Vorhersage der Rechenleistung beteiligt ist, dieser Einfluss jedoch über die basisnumerischen Fähigkeiten mediiert wird. Dieser Erklärungsansatz zum Zusammenhang zwischen Raum uns Zahl wird in Abschnitt 2.1 aufgegriffen und detailliert analysiert.

Eine weitere zentrale Erkenntnis bisheriger Forschungsarbeiten zur Zahlenverarbeitung ist, dass die Entwicklung numerischer und arithmetischer Fähigkeiten keinesfalls auf einem kognitiven Mechanismus oder auf ein Gehirnareal beschränkt werden kann, sondern dass ein komplexes multidimensionales Netzwerk etabliert werden muss, um kompetent rechnen zu können (Fias et al. 2013). Bei komplexen Rechnungen müssen die involvierten Gehirnareale miteinander interagieren. Das entsprechende neuronale Netzwerk und die assoziierten Funktionen interagieren dabei variabel und hochkomplex, um effiziente und flexible Rechenstrategien zu erlauben. Damit sich dieses neuronale Netzwerk ausbilden kann, sind zahlreiche Faktoren wie genetische Veranlagung (Kovas & Plomin 2006), Alter (Ansari & Dhital 2006), Entwicklungsstand (Sommerauer et al. 2020), Ausbildung (Brod et al. 2017) und andere Umwelteinflüsse wie der sozioökonomische Status (Hackman & Farah 2009) ausschlaggebend.

Auf neuro- und kognitionswissenschaftlicher Ebene wird dieses für das Verstehen von Zahlen und das Rechnen notwendige Netzwerk in zwei Bereiche gegliedert. Auf der einen Seite gibt es *domänenspezifische* Fähigkeiten, das sind jene Funktionen, die in spezifischem Zusammenhang zum Rechnen stehen (z. B. Mengenverständnis, Ordinalitätsverständnis, basisnumerische Fähigkeiten) (Lyons et al. 2016; Nieder & Dehaene 2009). Andererseits benötigen wir zum Rechnen auch *domänenübergreifende* Fähigkeiten. Bei Letzteren handelt es sich um Funktionen, die nicht nur für das Rechnen spezifisch sind, sondern generell zum Lernen oder beispielsweise beim Schriftspracherwerb benötigt werden (z. B. Arbeitsspeicher, Intelligenz und Raumvorstellung) (Szücs et al. 2014). Die neuronale Entwicklung dieser domänenspezifischen und domänenübergreifenden Funktionen ist ein dynamischer Prozess, der stark von der Art und Weise des Lernens und des Unterrichts abhängig ist. Beispielsweise führt ein spezifisches spielerisches Training im Kindergarten (z. B. Würfelspiele) zu einer funktionellen Verbindung der relevanten Gehirnareale (Brod et al. 2017; Jolles et al. 2016; Kucian et al. 2011). Ferner konnte gezeigt werden, dass es beim Übergang von einer spielerischen Vermittlung im Kindergarten zu einer eher formalen Beschulung in der ersten Klasse Grundschule zu unterschiedlichen Aktivitätsmustern bei domänenübergreifenden Prozessen (z. B. das temporäre Behalten von Information in unserem Gedächtnis) kommt, die Art und Weise des Unterrichts also großen Einfluss auf die Entwicklung der entsprechenden neuronalen Funktionen hat (Brod et al. 2017).

Zusammenfassend kann auf Basis der oben referierten Literatur postuliert werden, dass das Verständnis von Zahlen und das Rechnen ein hochkomplexer Vorgang in unserem Gehirn ist, der sich unterschiedlichen Gehirnarealen bedient (siehe Abb. 2). Dabei spielen sowohl domänenspezifische Funktionen als auch domänenübergreifende Funktionen sowie Umweltfaktoren wie der sozioökonomische Status und die Art und Weise der Beschulung und des Unterrichts eine Rolle (siehe Abb. 1).

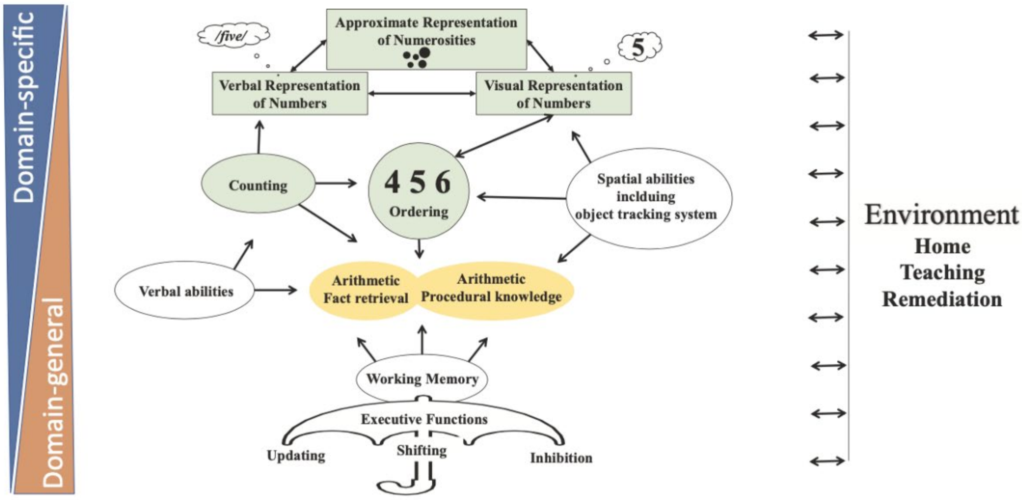


Abb. 1: Dynamische Interaktionen domänenspezifischer und domänenübergreifender Funktionen die für die Entwicklung von Zahlenverständnis (grün) und Rechnen (gelb) notwendig sind. Die approximative Repräsentation von Zahlen (semantische Größenrepräsentation), die visuelle Repräsentation und die verbale Repräsentation bilden das Triple-Code-Modell ab. Hilfsfunktionen wie visuell-räumliche und verbale Fähigkeiten sind gleichsam wie der Arbeitsspeicher in weiß dargestellt. Die Pfeile deuten ein- oder wechselseitige Einflüsse an (Vogel & De Smedt 2021, S. 2).

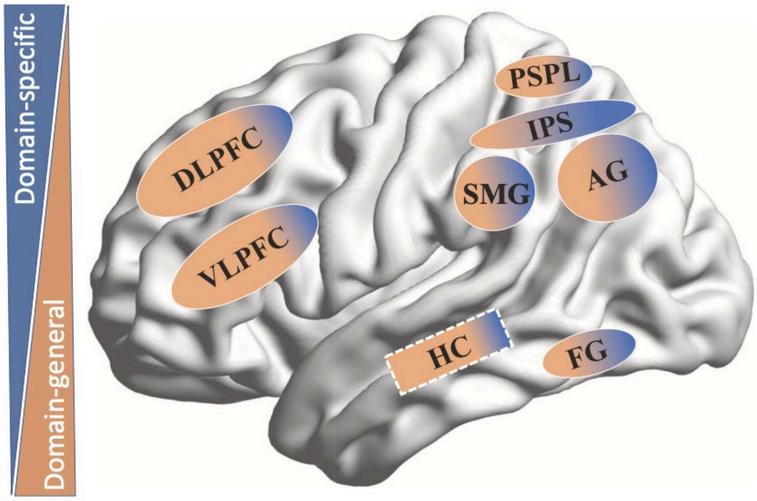


Abb. 2: Gehirnregionen des beim kompetenten Rechnen benötigten Netzwerks. Die blaue und orange Farbcodierung zeigt den relativen Einfluss der jeweiligen Gehirnregion an domänenübergreifenden und domänenspezifischen Funktionen. DLPFC = Dorsolateraler präfrontaler Kortex, VLPFC = Ventrolateraler präfrontaler Kortex, PSPL = Posteriorer superiorer Parietallappen, IPS = Intraparietaler Sulcus, SMG = Gyrus supramarginalis, AG = Gyrus angularis, FG = Gyrus fusiformis, HC = Hippocampus (die strichlierte Line deutet die mediale Position an) (Vogel & De Smedt 2021, S. 5).

1.2 Mentale Repräsentationen und Grundvorstellungen

Das zweite Ziel dieses Beitrags liegt darin, die in 1.1 dargestellten Ergebnisse aus der Kognitions- und Neurowissenschaft mit der Mathematikdidaktik zu verbinden und vorhandene Parallelen aufzuzeigen. In den letzten Jahren hat sich eine mathematikdidaktische Diskussion etabliert, bei der die zwei Ansätze, nämlich der psychologische und der stoffdidaktische Ansatz, zum Wissen über Zahlen in eine seltsame

Opposition gelangen (Lorenz 2017, S. 125). Da die Psychologie eine zentrale Bezugsdisziplin für die Mathematikdidaktik ist, erscheint es jedoch notwendig, die Ergebnisse aus der Kognitions- und Neurowissenschaft wohlwollend aufzugreifen, mit bestehenden mathematikdidaktischen Konzepten abzugleichen, die beiden Ansätze sinnvoll zu verbinden, empirisch zu prüfen und in die Praxis zu transferieren. Letzteres ist aus Sicht des Autors auch eine der Kernaufgaben der Mathematikdidaktik. Um dieser Forderung nachzukommen, zeigt der vorliegende Artikel am Beispiel der Aneignung des Zahlenverständnisses, dass es zu den mentalen Repräsentationen von Zahlen (z. B. der mentale Zahlenstrahl) durchaus ein Pendant aus der Mathematikdidaktik gibt, und zwar das Konzept der Grundvorstellungen.

Im Allgemeinen spricht man in der Kognitionspsychologie dann von mentalen Repräsentationen, wenn es darum geht, Repräsentanten von gedanklichen Konstrukten zu beschreiben. Gedankliche Konstrukte werden in der Mathematikdidaktik auch häufig als Begriffe oder Ideen bezeichnet und sind zeitlose Entitäten (Griesel et al. 2019). Beispiele solcher gedanklichen Konstrukte sind etwa die natürlichen Zahlen oder Dreiecke. Eine mentale Repräsentation des gedanklichen Konstrukts der natürlichen Zahlen ist dabei der mentale Zahlenstrahl, eine mentale Repräsentation des gedanklichen Konstrukts Dreieck wäre das innere Bild einer Dreieckszeichnung (Griesel et al. 2019, S. 125). Anhand dieser Beispiele wird erkennbar, dass wir für das Verstehen solcher abstrakten gedanklichen Konstrukte mentale Repräsentanten benötigen. Der Umgang mit einem gedanklichen Konstrukt besteht in der Regel häufig darin, dass an einem mentalen Repräsentanten mental operiert wird (Griesel et al. 2019, S. 126). Gedanken benötigen stets eine Repräsentationsform, sie fallen nicht vom Himmel (etwa durch eine Instruktion des Gedankens) und schweben dann im abstrakten, platonischen Raum, bis sie benötigt werden, um Ideen zu erkennen (Lorenz 2017, S. 129). Die allgemeinen (wohlbekannten) Formate dieser Repräsentationen sind enaktiv, ikonisch und symbolisch (vgl. Bruner 1964; Seel 2003, S. 61; Morra et al. 2008, S. 27). Die enaktiven Repräsentationen gedanklicher Konstrukte sind dabei die Bausteine, die „building blocks“ wie sie Rumelhart (1980) bezeichnete, für jede weitere kognitive Entwicklung. Enaktive Repräsentationsschemata werden durch (wiederholte) Handlungen an konkreten Materialien (in der Mathematikdidaktik Erarbeitungs- oder weniger treffend Anschauungsmaterial genannt) generiert. Ein Beispiel dazu wäre etwa das Arbeiten mit dekadischen Stellenwertmaterialien (meist aus Holz) in der Grundschule, um eine enaktive Repräsentation des dezimalen Stellenwertsystems zu erzeugen. An dieser Stelle fällt auf, dass jedwede Handlung an konkreten Materialien zum Aufbau enaktiver Repräsentationsformen eng mit Raumvorstellung verbunden ist. Der Übergang zu ikonischen oder auch zu symbolischen Repräsentationsformen kann nur gelingen, wenn die konkrete Handlung nicht mehr ausgeführt werden muss und in der Anschauung vorstellbar ist (Booth & Siegler 2008). Letzteres bedarf visuell-räumlicher Fähigkeiten, da die Handlung nun ja nicht mehr ausgeführt wird und Handlungsergebnisse durch rein mentales operieren vorausgesagt werden. Die Handlung wird in der Vorstellung vollzogen (Lorenz 2017, S. 129). Durch die building blocks etablieren sich zentrale Begriffsstrukturen, die die Wissensbestände der Kinder ausmachen („Central Conceptual Structures“, CCS, Case & Okamoto 1996). Aus den anfänglich isolierten Konzepten der building blocks bilden sich durch die Änderung von Repräsentationsformaten umfassendere Strukturen aus. So wird etwa aus der verbalen Repräsentationsform der natürlichen Zahlen (in Form der Zahlwortreihe) durch eine Repräsentationsänderung eine anschauliche lineare Sequenz, der mentale Zahlenstrahl. Dadurch wird auch schnell klar, dass beispielsweise die Hundertertafel nicht als logische Repräsentationsänderung der Zahlwortreihe angesehen werden kann (Morra et al. 2008, S. 210 ff). Diese Umorganisationen von Repräsentationen werden im kognitionspsychologischen RR-Modell von Karmiloff-Smith (1992) genauer beschrieben und sind für die Mathematikdidaktik insofern relevant, als dass darin Lernphasen beschrieben werden, die jedes Lernen durchlaufen.

Zusammenfassend beschreibt die Kognitionspsychologie in ihren Ansätzen die Genese gedanklicher Konstrukte durch die Umorganisation von Repräsentationen (Lorenz 2017, S. 130). Sie liefert Evidenz, wie solche mentalen Repräsentationen zu gedanklichen Konstrukten aus der logischen Entwicklung des

Kindes aussehen und wie die Basis in Form der building blocks aus konkreten Handlungen heraus aufgebaut werden muss (vgl. z. B. Shrager & Siegler 1998). Nun ist es aber keineswegs so, dass der Mathematikdidaktik mentale Repräsentationen fremd sind, diese sind seit Jahrzehnten Thema und werden in Form von Grundvorstellungen beschrieben (Griesel et al. 2019, S. 125).

1.3 Ziele des Beitrags

Im Sinne der oben dargelegten Ergebnisse, werden in Abschnitt 2 drei zentrale Erklärungsansätze zum Zusammenhang von Raumvorstellung und Zahlenverarbeitung beschrieben. Dabei wird in 2.1 der mentale Zahlenstrahl als Bindeglied zwischen visuell-räumlicher Kognition und basaler Zahlenverarbeitung dargestellt, in 2.2 werden Ergebnisse aus der Neuropsychologie referiert, die zeigen, dass insbesondere der Parietallappen nicht ausschließlich für die Zahlenverarbeitung und das Rechnen zuständig ist, sondern auch für nichtnumerische Funktionen wie räumliche Fähigkeiten und Aufmerksamkeit (Landerl et al. 2022, S. 48f). In 2.3 wird schließlich gezeigt, dass dem visuell-räumlichen Arbeitsspeicher eine zentrale Rolle bei der Verarbeitung von Zahlen und beim Rechnen im Allgemeinen zukommt. Die Darstellung der Erklärungsansätze erfolgt hier in abgekürzter Weise und ist in der Onlineversion ausführlich nachzulesen.

Der dritte Abschnitt widmet sich der friedvollen Annäherung von mentalen Repräsentationen und Grundvorstellungen. Dabei wird beschrieben, wie die Relation zwischen gedanklichem Konstrukt und mentaler Repräsentation aufgebaut sein muss, um auch fachmathematisch zu entsprechen. Abschließend wird gezeigt, dass Grundvorstellungen nichts anderes sind als mentale Repräsentationen mathematischer Objekte (und damit gedanklicher Konstrukte). Damit wird auch verdeutlicht, dass das Zusammenführen psychologischer und mathematikdidaktischer Ansätze in der Science Community der Mathematikdidaktik thematisiert wird (Griesel et al. 2019, S. 128).

Im vierten Abschnitt werden die referierten Erkenntnisse zusammengefasst und es wird erläutert, warum es, ob der hier dargelegten Literatur einmal mehr sinnvoll ist, dem Raumvorstellungsunterricht in der Praxis genügend Platz einzuräumen.

2 Erklärungsansätze zum Zusammenhang zwischen Raumvorstellung, Zahlenverarbeitung und dem Rechnen

2.1 Der mentaler Zahlenstrahl

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, wie Menschen Zahlen denken, wie damit operiert wird und warum es dabei einen Zusammenhang zur Raumvorstellung gibt.

Zahlen, wir beschränken uns hier auf natürliche Zahlen, sind abstrakte Begriffe (also gedankliche Konstrukte) die eines Repräsentationsformats bedürfen. Auf Basis bisheriger Ergebnisse, wird davon ausgegangen, dass Zahlen räumlich und zumindest in unserer mitteleuropäischen Kultur, von links nach rechts orientiert gedacht werden (Lindemann & Fischer 2015). Diese mentale Repräsentationsform von Zahlen wird in der Literatur als mentaler Zahlenstrahl (mental number line) bezeichnet und stellt im vorliegenden Beitrag gleichsam den ersten Erklärungsansatz des Zusammenhangs zwischen Zahl und Raum dar. Nun stellt sich die logisch nächste Frage, welche Evidenz es dafür gibt, dass Zahlen längs eines solchen mentalen Zahlenstrahls räumlich enkodiert werden. Die Antwort darauf liefern zwei mehrfach replizierte Effekte, nämlich der *SNARC-Effekt* („spatial numerical association of response codes", auf Deutsch: räumlich-numerische Assoziation des Antwortcodes) und der *Distanzeffekt*. Eine detaillierte Beschreibung der beiden Effekte findet sich in der Onlineversion des Artikels.

Ein weiteres Indiz für den mentalen Zahlenstrahl und die dadurch postulierte räumliche Orientierung der Zahlen sind Untersuchungen von Neglektpatient*innen. Neglekt tritt nach einer rechtshirnigen parietalen Schädigung auf, ist eine meist temporäre neurologische Störung und äußert sich dadurch, dass Betroffene die linke Raumhälfte vernachlässigen. Die Symptome werden etwa beim Lesen, beim Schreiben oder auch bei Alltagsaktivitäten wie Essen oder Körperpflege sichtbar. Ein klassisches Diagnoseinstrument zur Identifizierung eines Halbseitenneglekts sind Linienbisektionsaufgaben. Hier sollen die Patient*innen die Mitte einer präsentierten Strecke kennzeichnen. Neglektpatient*innen zeigen dabei einen systematischen Fehler, der sich durch die Verschiebung der Mitte nach rechts äußert. Begründet wird der Fehler durch die Tatsache, dass sie die linke Raumhälfte – also auch den linken Teil der zu halbierenden Strecke – nicht wahrnehmen. In einer viel beachteten Studie mit Neglektpatient*innen konnten Zorzi und Kolleg*innen (2002) zeigen, dass sich auch bei verbal formulierten Zahlenbisektionsaufgaben („Welche Zahl liegt genau zwischen 2 und 6?“) ähnliche systematische Fehler zeigen wie bei der Linienbisektionsaufgabe. Neglektpatient*innen ignorieren dabei offenbar die linke Hälfte des mentalen Zahlenstrahls und antworten beispielsweise auf die obige Aufgabe mit „fünf“. Diese Ergebnisse sprechen, wie auch der Distanzeffekt im Allgemeinen, zweifellos dafür, dass Zahlen räumlich, über einen von links nach rechts orientierten mentalen Zahlenstrahl repräsentiert sind.

Zusammenfassend lässt sich ableiten, dass die Kognitions- und Neuropsychologie in den letzten 25 Jahren vielfältige und ständig replizierte Ergebnisse hervorgebracht hat, die dafürsprechen, dass Zahlen räumlich in Form einer mental number line gedacht werden (Ward 2006; Lindemann & Fischer 2015; Roggeman et al. 2015; van Dijck et al. 2015; Fias & Fisher 2005). In stark abgekürzter und dem Entwicklungsverlauf der Kinder angepasster Form kann in Anlehnung an Lorenz (2017) festgehalten werden, dass

- Zahlen bereits im Vorschulalter räumlich entsprechend einer linearen Zahlenstrahlvorstellung repräsentiert sind (Patro et al. 2015),
- sich diese Repräsentationsform im Grundschulalter weiter elaboriert (Lyons et al. 2015; Dietrich et al. 2015),
- der mentale Zahlenstrahl trainierbar ist und in höheren Grundschulklassen zu besseren Rechenleistungen führt (Siegler & Ramani 2008; Fischer et al. 2011, 2013; Fischer und Möller 2014; Moeller et al. 2015; Obersteiner et al. 2013; Kucian et al. 2011; Judd & Klingberg 2021),
- und dass diese Repräsentationsform eine universelle ist, die lediglich in ihrer Orientierung von kulturellen Einflüssen abhängt (Nuerk et al. 2005; Göbel et al. 2011; Reinert et al. 2015a, 2015b).

Innerhalb der Kognitions- und Neuropsychologie gelten die hier referierten Ergebnisse mittlerweile als gesichert. Es kann also ob des SNARC- und des Distanzeffekts sowie der Studien mit Neglektpatient*innen davon ausgegangen werden, dass die Repräsentation von Zahlen in unserem Kopf räumlich in Form eines Zahlenstrahls verankert ist.

Diese Beziehung zwischen Raum und Zahl über den mentalen Zahlenstrahl wird, wie in 1.1 bereits angedeutet, im Triple-Code-Modell von Dehaene (1999) als semantische Größenrepräsentation abgebildet. Daneben gibt es noch die Repräsentationen als Worte bzw. Ziffern, die im Triple-Code-Modell entsprechend als verbales bzw. visuelles Modul implementiert sind.

2.2 Neuronale Grundlagen räumlicher und numerischer Kognitionen

Neben der bisher dargelegten behavioralen Evidenz zur Assoziation zwischen Zahlenverarbeitung und Raumvorstellung widmet sich dieser Abschnitt der Frage, ob es auch neurowissenschaftliche Ergebnisse gibt, die für eine enge Verbindung zwischen Zahl- und Raumvorstellung sprechen.

Historische Fallstudien und die Rolle des linken Gyrus angularis

Neurowissenschaftlich wurde schon sehr früh eine Verbindung zwischen Raum und Zahl angenommen, da Läsionen im Parietallappen zu gemeinsamen Beeinträchtigungen numerischer und visuell-räumlicher Funktionen führten (Gerstmann 1940; Holmes 1918; Stengel 1944). Beim, nach dem Entdecker benannten, Gerstmann Syndrom, kam es etwa bei einem Patienten nach einer Läsion in der Nähe des Gyrus angularis (lokalisiert im Parietallappen) zu einer Rechenstörung, die mit einer Fingeragnosie, einer Agraphie (Schreibstörung) sowie einer Rechts-links-Störung gepaart war (Gerstmann 1940). Es gibt mittlerweile Evidenz dazu, dass das Hauptdefizit beim Gerstmann Syndrom darin liegt, dass Patient*innen Probleme bei der mentalen Manipulation von Bildern haben, insbesondere bei der mentalen Rotation von Objekten (Mayer et al. 1999). Diese Fallstudien suggerieren bereits einen potenziellen neuronalen Zusammenhang zwischen der visuell-räumlichen Verarbeitung und numerischen Kognitionen im Gyrus angularis. Dieser Verdacht wurde in jüngeren Studien mittels transkranieller Magnetstimulation (TMS), einer Methode, bei der temporäre Läsionen künstlich durch starke Magnetfelder evoziert werden, bestätigt. So konnte in Studien nachgewiesen werden, dass Disruptionen im linken Gyrus angularis zu Beeinträchtigungen des mentalen Zahlenstrahls führen (Cattaneo et al. 2009; Göbel et al. 2006; Göbel et al. 2001). In jüngeren Studien häufen sich jedoch die Ergebnisse, dass der Gyrus angularis eher für verbale numerische Funktionen verantwortlich ist (für eine Übersicht vgl. Polspoel et al. 2017). Unter diesen verbalen numerischen Funktionen werden etwa gesprochene/gehörte Zahlwörter oder auch arithmetisches Faktenwissen (wie z. B. das Einmaleins) verstanden. Diese Ergebnisse widersprechen der Hypothese, dass der Gyrus angularis ein Gehirnareal ist, das sowohl für numerische als auch für räumliche Funktionen zuständig ist. Die tatsächliche Rolle des linken Gyrus angularis im neuronalen Netzwerk der Zahlenverarbeitung kann heute am besten durch das Triple-Code Modell von Dehaene (1992; 2005) erklärt werden. Im Triple-Code Modell werden dem linken Gyrus angularis verbale Repräsentationen (also das verbale Modul) zugeordnet (siehe auch 1.1), während dem intraparietalen Sulcus (IPS) die Mengenverarbeitung und auch der mentale Zahlenstrahl, also die semantische Größenrepräsentation, zugeschrieben werden (Dehaene & Cohen 1997; Dehaene et al. 2005). Die Zuschreibung des linken Gyrus angularis zu verbalen symbolischen Zahlenfunktionen konnte in einer jüngeren fMRT-Studie rezipiert werden (Sokolowski 2017). Zudem konnte in der Meta-Analyse von Zacks (2008) nachgewiesen werden, dass es bei mentalen Rotationsaufgaben zu keiner funktionellen Aktivität des linken Gyrus angularis kam, sehr wohl zeigten sich jedoch funktionelle Aktivitäten in frontalen (bilateral) und parietalen Arealen.

In Anbetracht der referierten Befundlage wird aktuell davon ausgegangen, dass der linke Gyrus angularis eine maßgebliche Rolle bei der verbalen Zahlenverarbeitung spielt, wohingegen der Zusammenhang zwischen numerischen und räumlichen Kognitionen dem IPS und frontalen Gehirnregionen zugeordnet wird. Demnach werden im weiteren Verlauf des Beitrags die letztgenannten Gehirnareale fokussiert.

Der IPS – Eine zentrale Gehirnregion für numerische und räumliche Größen

Der intraparietale Sulcus (IPS) ist sowohl für die Erforschung der Zahlenverarbeitung und des Rechnens als auch für Wissenschaftler*innen die sich mit der Frage der visuell-räumlichen Kognition beschäftigen von zentraler Bedeutung. Die Ansprüche und Ziele der beiden Forschungsrichtungen hinsichtlich des IPS sind dabei jedoch kontrovers. Die Ergebnisse seitens der Forscher*innen, die sich mit der Entwicklung der numerischen Kognition beschäftigen, sprechen dafür, dass der IPS das zentrale Gehirnareal für die Mengenverarbeitung ist, das heißt, dass der IPS jene Gehirnregion ist, in der die semantische Größenrepräsentation des Triple-Code-Modells verortet ist (Butterworth 1999; Dehaene et al. 2005). Dem gegenüber sprechen die Resultate der Raumvorstellungsforschung dafür, dass im IPS visuell-räumliche Transformationen, also z. B. mentale Rotationen verarbeitet werden (Jordan et al. 2001; Zacks 2008). Diese Differenzen hinsichtlich der Ergebnisse rühren mit großer Wahrscheinlichkeit aus der Tatsache, dass die Beforschung des IPS von beiden Disziplinen isoliert passiert und bisher wenig Austausch stattfand. Im Folgenden werden zentrale Ergebnisse beider Disziplinen kurz vorgestellt, um einen Einblick in die aktuelle Forschungslage hinsichtlich des IPS zu bekommen. Eine ausführliche Darstellung der Forschungslage findet man in der Onlineversion.

Sieht man sich den Zugang seitens der numerischen Beforschung des IPS an, kann festgehalten werden, dass dessen Rolle hinsichtlich der Zahlenverarbeitung seit gut zwei Jahrzehnten fokussiert wird. Daraus entstand ausreichend Evidenz, die zeigt, dass der IPS sowohl bei symbolischen („3“ oder „drei“) als auch bei non-symbolischen (∴) Aufgaben aktiv ist. Diese Tatsache, dass der IPS unabhängig vom dargebotenen Zahlenformat (z. B. Hören der Zahl „drei“ oder Sehen des Symbols „3“) Aktivität zeigt, legt nahe, dass im IPS eine abstrakte und vollautomatische Repräsentation der Zahl abläuft, was der semantischen Größenrepräsentation des Triple-Code Modells von Dehaene entspricht. Konkret heißt das, dass wir, selbst wenn wir nur eine Zahl sehen oder hören (ohne damit zu operieren), automatisch an eine numerische Größe denken.

Hervorzuheben ist, dass der IPS abgesehen von domänenspezifischen Kognitionen auch eine wichtige Hirnregion für die Verarbeitung nichtnumerischer Funktionen, wie räumliche Fähigkeiten, Lichtstärke, Aufmerksamkeit oder Zeit ist (Kadosh et al. 2008; Sokolowski et al. 2017, Hubbard et al. 2005; Simon et al. 2002). Beispielsweise zeigt der IPS nicht nur beim Größenvergleich zweier Zahlen Aktivität, sondern auch beim Längenvergleich zweier Strecken (Pinel et al. 2004). Im Jahr 2003 formulierte Vincent Walsh eine bis heute sehr einflussreiche Hypothese, die sogenannte ATOM-Hypothese („A theory of magnitude“). Darin wird postuliert, dass der Parietallappen nicht zahlenspezifisch ist, sondern dass Zahlenverarbeitung nur ein Aspekt einer umfangreichen Größenrepräsentation ist. Zusätzlich zu numerischen Größen zählen auch räumliche und zeitliche Größen zu dieser umfassenden Größenrepräsentation (Walsh 2003). Seit der Publikation von Walsh gibt es zahlreiche empirische Befunde, die die ATOM-Hypothese bestätigen. Eine der Arbeiten, die für die ATOM-Hypothese sprechen, ist die prominente Publikation von Cohen Kadosh und Kollegen (2005) zum Distanzeffekt und zum mentalen Zahlenstrahl. Die Arbeit zeigt recht eindrucksvoll, dass der Distanzeffekt nicht nur beim Zahlenvergleich, sondern auch beim Vergleich räumlicher Größen sowie beim Vergleich von Helligkeiten auftritt.

Neben diesen allgemeinen Größenrepräsentationen, zu denen auch räumliche Größen zählen, stellt sich die Frage, ob der IPS auch an spezifischeren räumlichen Kognitionen (wie z. B. mentaler Rotation) beteiligt ist. Die Frage kann wie folgt beantwortet werden: Obwohl die neuronalen Prozesse mentaler Rotationsaufgaben isoliert von numerischen Prozessen untersucht wurden suggeriert die bestehende Literatur Überlappungen parietaler Bereiche, die bei numerischen Aufgaben und bei Aufgaben zur mentalen Rotation aktiv sind. Die größte Evidenz einer solchen Überlappung gibt es dabei für den IPS (Hawes et al. 2019). Zacks (2008) wies in seiner Metaanalyse sogar nach, dass der IPS die konsistentesten und robustesten Aktivitätsmuster bei Aufgaben zur mentalen Rotation zeigt. Dieses Ergebnis führte zu Spekulationen, dass der IPS auch für andere visuell-räumliche Transformationen zuständig sei, etwa für geometrische Translationen (Jordan et al. 2001; Seydell-Greenwald et al. 2017; Zacks 2008).

Zusammenfassend lässt sich auf Basis der bisherigen Evidenz ableiten, dass der IPS und benachbarte parietale Bereiche sowohl für numerische Prozesse als auch für visuell-räumliche Kognitionen eine maßgebliche Rolle spielen. Die Funktionen, die dabei dem IPS zugeschrieben werden, variieren jedoch und erstrecken sich von domänenspezifischen numerischen Funktionen über umfassende Größenrepräsentationen bis hin zu spezifischen visuell-räumlichen Transformationen. Abschließend sei dazu noch die Meta-Analyse von Hawes et al. (2019) erwähnt, die 86 neurowissenschaftliche Arbeiten hinsichtlich der neuroanatomischen Netzwerke des Rechnens, der Zahlenverarbeitung und der Raumvorstellung untersuchten. Dabei zeigte sich, dass es bei allen drei Kognitionsbereichen zu bilateralen Aktivitätsüberlappungen parietaler Regionen in und um den IPS kam.

Die Rolle frontaler Gehirnareale beim Rechnen

Zusätzlich zu den parietalen Arealen sind auch frontale Gehirnregionen während numerischer und visuell-räumlicher Aufgabenstellungen aktiv (Desco et al. 2011; Matejko & Ansari 2015). Verglichen mit dem Interesse an der Erforschung der Aktivitätsmuster parietaler Bereiche, hält sich die Aufmerksamkeit für frontale Bereiche jedoch eher in Grenzen. Dies liegt unter anderem darin begründet, dass den frontalen Gehirnregionen ohnedies domänenübergreifende Funktionen, wie etwa das Arbeitsgedächtnis zugeschrieben werden (Fincham et al. 2002; Owen et al. 2005; Smith & Jonides 1999). Das Arbeitsgedächtnis spielt insbesondere bei mehrstufigen Aufgabenlösungen eine Rolle, da dort Zwischenergebnisse gespeichert werden müssen (Baddeley 1986; 2000). Eine detailliertere Beschreibung der rechenspezifischen Funktionen frontaler Gehirnareale findet sich in der Onlineversion.

Insgesamt zeigt sich, dass die basisnumerische Verarbeitung, wozu auch das arithmetische Faktenwissen (z. B. Einmaleins) zählt, eher in parietalen Bereichen verortet ist, während beim Rechnen ein ganzes Netzwerk an Gehirnarealen involviert ist, wozu auch frontale Gehirnregionen zählen. Zudem werden frontale Gehirnregionen bei mentalen Rotationsaufgaben bemüht, was insbesondere mit dem visuell-räumlichen Arbeitsspeicher und der ebenfalls in frontalen Bereichen lokalisierten motorischen Koordination begründet wird (Zacks 2008).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das frontal-parietale-Netzwerk sowohl für numerische als auch für räumliche Funktionen zuständig ist und gleichsam die neuronale Grundlage der Zahlenverarbeitung und des Rechnens darstellt (Desco et al. 2011; Matejko & Ansari 2015).

2.3 Das (visuell-räumliche) Arbeitsgedächtnis

Um komplexe Rechenaufgaben lösen zu können, ist auch ein intaktes Arbeitsgedächtnis notwendig (Logie et al. 1994; Tronsky 2005). Im Arbeitsgedächtnis werden Gedächtnisinhalte vorübergehend gespeichert und bearbeitet (Baddeley 1986). Die für das Rechnen relevante Komponente des Arbeitsgedächtnisses ist die sogenannte zentrale Exekutive. Dabei handelt es sich in Anlehnung an das populäre Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley (1986; 2000) um das supervisorische Kontrollsystem, welches die Aktivitäten der beiden Speichersysteme (visuell-räumlich und verbal) koordiniert. Im visuell-räumlichen Speicher wird entsprechend visuell-räumliches Material, im verbalen sinngemäß verbal-phonologisches Material verarbeitet. Die Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis sind beispielsweise dann sehr hoch, wenn Zehnerüberträge bearbeitet werden müssen, diese aber nicht schriftlich festgehalten werden dürfen, sondern im Arbeitsgedächtnis temporär gespeichert werden (Landerl & Kaufmann 2013, S. 42). Die Überträge werden dabei während des weiteren Ausführens der Rechnung im verbal-phonologischen Arbeitsspeicher subvokal rezitiert. Ist die Kapazität des entsprechenden Arbeitsspeichers reduziert, kann es passieren, dass die Überträge verloren gehen oder „vergessen werden“ und die Rechnung trotz fehlerfreier Anwendung der Rechenprozedur falsch ist (Noël et al. 2001).

Studien zeigen, dass das Arbeitsgedächtnis je nach mathematischen Entwicklungsstand und Alter der Kinder unterschiedlich beansprucht wird (McKenzie et al. 2003; Palmer 2000). Jüngere Kinder (6-7 Jahre) beanspruchen beim mentalen Lösen mathematischer Aufgaben (Kopfrechnen) überwiegend den visuell-räumlichen Arbeitsspeicher, während 8- bis 9-Jährige bei entsprechenden Aufgaben sowohl den visuell-räumlichen als auch den verbal-phonologischen Arbeitsspeicher bedienen (McKenzie et al. 2003). Die Aktivität im visuell-räumlichen Arbeitsspeicher beim Lösen von Rechenaufgaben nimmt also mit zunehmendem Alter ab, während jene der verbal-phonologischen Schleife zunimmt (Li & Geary 2013; Van de Weijer-Bergsma et al. 2015). Es wird dabei angenommen, dass jüngere Kinder im Vergleich zu älteren beim Lösen arithmetischer Probleme stärker auf visuell-räumliche mentale Darstellungen und Strategien (Zahlenstrahl, Zählmaterial, …) angewiesen sind (Liang et al. 2022). Ältere Kinder hingegen konsolidieren das durch Übung gesammelte Faktenwissen (z. B. Einspluseins, Multiplikationsfakten) und rufen es aus dem Langzeitgedächtnis ab, wodurch sie stärker auf den verbalen Arbeitsspeicher angewiesen sind (Gordon et al. 2022). In ähnlicher Weise wenden Grundschulkinder beim Erlernen neuer mathematischer Inhalte enaktive (handelnde) Strategien an, die wiederum verstärkt den visuell-räumlichen Arbeitsspeicher beanspruchen (Cragg et al. 2017). Je vertrauter die Kinder mit dem arithmetischen Stoff werden, desto stärker wird die Aktivierung des verbalen Arbeitsspeichers bei gleichzeitiger Abnahme der Aktivität im visuell-räumlichen Arbeitsspeicher. Letzteres wird damit begründet, dass der verbale Arbeitsspeicher zum Abrufen und zur Aufrechterhaltung gelernter Fakten benötigt wird (Bailey et al. 2012). Eine detaillierte Darstellung der aktuellen (kontroversen) Forschungslage zur Rolle des Arbeitsspeichers beim Lösen von Rechenaufgaben kann in der Onlineversion nachgelesen werden.

Zusammenfassend lässt sich ableiten, dass sowohl der verbale als auch der visuell-räumliche Arbeitsspeicher maßgeblich beim Bearbeiten von Rechenaufgaben beteiligt sind, wenn auch noch weitere differenzierte Analysen hinsichtlich der spezifischen Zusammenhänge ausstehen. Da der visuell-räumliche Arbeitsspeicher auch für Raumvorstellungsaufgaben (z. B. mentale Rotationen) benötigt wird, kann hier ein weiterer indirekter Zusammenhang zwischen dem Rechnen und visuell-räumlicher Kognitionen konstatiert werden.

3 Grundvorstellungen natürlicher Zahlen und der mentale Zahlenstrahl

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, dient dieser Abschnitt dazu, die oben referierten Ergebnisse der Neuro- und Kognitionswissenschaften mit bestehenden fachdidaktischen Konzepten zu verbinden, diese dadurch etwas auszubauen und eine Beziehung beider Wissenschaftsdisziplinen herzustellen.

Als fachdidaktische Antwort auf *mentale Repräsentationen* (wie sie in der Kognitionswissenschaft bezeichnet werden) dient das Konzept der *Grundvorstellungen*. Grundvorstellungen sind nach Rudolf vom Hofe (1995, S. 98) die Beziehung zwischen Mathematik, Individuum und Realität und haben sich in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik längst etabliert. Sie sind mittlerweile auch für zahlreiche mathematische Inhaltsbereiche definiert (z. B. für natürliche Zahlen, Brüche, Funktionen, …). Diese *mathematischen Inhaltsbereiche* werden, wie in 1.2 dargestellt, als *gedankliche Konstrukte, Begriffe* oder *Ideen* bezeichnet. Nun erhebt sich die Frage, was Grundvorstellungen bzw. mentale Repräsentationen leisten müssen, dass sie diese Beziehung zwischen Mathematik, Individuum und Realität leisten können. Dazu müssen sie nicht nur zu unserem „Denken“ passen (was mentale Repräsentationen/Grundvorstellungen ja gerade ausmacht), sondern auch mathematisch korrekt sein, um die Beziehung zur Mathematik fehlerfrei herzustellen. Beispielsweise haben Schülerinnen und Schüler in der Regel individuelle, zu ihrer Realität passende Grundvorstellungen zu gedanklichen Konstrukten, die zwar in ihrer subjektiven Vorstellung zum gedanklichen Konstrukt passen, mathematisch jedoch unkorrekt sind (vom Hofe 1995). Solche unrichtigen individuellen Grundvorstellungen (Fehlvorstellungen) müssen im Unterricht erkannt und ehestmöglich zu normativen (auch universellen genannt) Grundvorstellungen transformiert werden.

Als konkretes Beispiel einer korrekten Beziehung zwischen gedanklichem Konstrukt und mentaler Repräsentation sollen hier, passend zum Beitrag, die natürlichen Zahlen dienen. Im Allgemeinen muss zwischen einem gedanklichen Konstrukt und jeglicher Form dessen Repräsentation eine Strukturgleichheit (Isomorphie) gegeben sein (Griesel et al. 2019). Am Beispiel der natürlichen Zahlen heißt das, dass der mentale Zahlenstrahl, der seitens der Kognitions- und Neurowissenschaft als idealtypischer Repräsentant gilt, isomorph zum mathematischen Konstrukt der natürlichen Zahlen passen muss. Ist diese Strukturgleichheit gegeben, kann der mentale Zahlenstrahl als normative/universelle Grundvorstellung bezeichnet werden. Eine Überprüfung dieser Isomorphie zwischen dem mentalen Zahlenstrahl und den natürlichen Zahlen findet sich in der Onlineversion.

Eine andere mentale Repräsentation der natürlichen Zahlen ist die *Mengenvorstellung*. Diese findet insbesondere beim Operationsverständnis der vier Grundrechenarten Anwendung. Beispielsweise aktivieren Schülerinnen und Schüler diese mentale Repräsentation dann häufig, wenn bei Sachrechnungen entschieden werden muss, welche Rechenoperation(en) zur Lösung der Aufgabe führen (Lorenz 2017, S. 134; Griesel et al. 2019, S. 126).

Der *mentale Zahlenstrahl* und die *Mengenvorstellung* natürlicher Zahlen sind dabei keinesfalls zwei voneinander isolierte mentale Repräsentationen. Die Mengenvorstellung zur Zahl 7 beispielsweise lässt sich am mentalen Zahlenstrahl durch die Abschnitte (Zwischenräume) zwischen den Zahlpunkten 0 und 7 realisiert denken (Griesel et al. 2019, S. 126f). Mathematisch gesehen ist die Mengenvorstellung am mentalen Zahlenstrahl sehr nahe mit dem Absolutbetrag einer Zahl verwandt. Für die mentale Repräsentation der Menge einer Zahl als Summe der Abschnitte zwischen zwei Zahlen (meist zwischen 0 und der betreffenden Zahl) ist noch anzumerken, dass diese Abschnitte nicht äquidistant sein müssen.

Dabei wird nach Griesel und Kollegen (2019, S. 127) auch klar, dass wenn wir von *Zahlenräumen* (z. B. Zahlenraum 10), *Nachbarzahlen* oder der *Nähe von Zahlen* sprechen (Gaidoschik 2015, S. 166), es sich keinesfalls um Metaphern handelt. Der Abstand zwischen zwei natürlichen Zahlen am mentalen Zahlenstrahl ist dabei, wie oben beschrieben, als Summe der Zwischenräume aufzufassen. Demnach gibt es zwischen zwei Nachbarzahlen immer genau einen Zwischenraum. Letzteres ist nach Griesel und Kollegen (2019, S. 127) auch die *Grundvorstellung*, die mit dem Begriff *Nachbarzahlen* zu verbinden ist.

Ob auch die bereits in der Einleitung kurz erwähnte Hundertertafel in gleicher Weise wie der *mentale Zahlenstrahl* als mentale Repräsentation der natürlichen Zahlen hilfreich ist, müsste empirisch geklärt werden. Aufgrund dessen, dass für die Hundertertafel dahingehend jedoch kognitions- und neurowissenschaftliche Belege fehlen, sollte man *„mit einer Hochschätzung dieses methodischen Mittels […] eher zurückhaltend sein“* (Griesel et al. 2019, S. 127).

Zusammenfassend und verallgemeinert lässt sich ableiten, dass sowohl mathematische Objekte (gedankliche Konstrukte) als auch deren mentale Repräsentationen Relationsgebilde sind. Zwischen den Relationsgebilden muss dabei eine Strukturgleichheit (Isomorphie) gegeben sein. Subjektive Vorstellungen zu einem Begriff, die keine Isomorphie zum mathematischen Objekt aufweisen, sind unkorrekt und damit auch keine idealtypischen normativen Grundvorstellungen. In der Fachdidaktik wird hierbei auch oft von Fehlvorstellungen gesprochen. Viele der naiven Vorstellungen der Kinder zu den abstrakten mathematischen Konstrukten sind dabei a priori unkorrekt und müssen im Zuge des Unterrichts zu korrekten Grundvorstellungen, mit denen dann operiert werden kann transformiert werden. (Normative) Grundvorstellungen sind nichts anderes als mentale Repräsentationen mathematischer Objekte und damit das Bindeglied zwischen der Kognitions- und Neurowissenschaft und der Mathematikdidaktik (Griesel et al. 2019, S. 128). Eine umfassendere Darstellung des Grundvorstellungskonzepts kann in der Onlineversion nachgelesen werden.

4. Zusammenfassung und Praxisableitungen

Der vorliegende Beitrag beschreibt die Zusammenhänge zwischen Raumvorstellung und basisnumerischer Verarbeitung sowie dem darauf basierenden Rechnen. Dabei werden überwiegend kognitions- und neurowissenschaftliche Ergebnisse der letzten dreißig Jahre herangezogen und davon drei Erklärungsansätze abgeleitet.

Zahlen benötigen in unseren Gedanken eine Repräsentationsform. Dabei gibt es nicht eine einzige universelle Repräsentationsform, sondern unterschiedlichen Modalitäten wie Zahlen gedacht werden können (Siegler & Opfer 2003). Nach Dehaene etablieren sich im Laufe der kognitiven Entwicklung drei Hauptrepräsentationen von Zahlen, eine verbale, eine visuelle und eine semantische Größenrepräsentation. Letztere, wird auch als mentaler Zahlenstrahl bezeichnet, stellt eine direkte Verbindung zur Raumvorstellung her und dient hier als erster Erklärungsansatz zum Zusammenhang zwischen Raum und Zahl. Zahlreiche Studien konnten mittlerweile nachweisen, dass Zahlen räumlich entlang einer Linie gedacht werden, wobei die einzelnen Zahlen dabei Positionen/Plätze auf dieser Linie einnehmen. Zusätzlich ist diese Zahlenlinie mit einem Richtungssinn versehen. Die theoretische Annahme besteht nun darin, dass Defizite in der Raumvorstellung den Aufbau dieses mentalen Zahlenstrahls erschweren (Hubbard et al. 2005, Zorzi et al. 2002) und es somit zu Schwierigkeiten beim Rechnen (insbesondere Überschlagsrechnen und Schätzen) kommen kann.

Ein zweiter Erklärungsansatz besteht in der neuronalen Verarbeitung. Sowohl die Zahlen- und Mengenverarbeitung als auch die visuell-räumliche Verarbeitung finden zu wesentlichen Teilen im Parietallappen, genauer im intraparietalen Kortex statt (Walsh 2003). Allerdings ist diese neuroanatomisch vergleichbare Lokalisierung nicht zwingend gleichzusetzen mit einer funktionalen Assoziation (Landerl & Kaufmann 2013, S. 127). Es könnten beispielsweise benachbarte Neuronengruppen koaktiviert werden, die jedoch funktionell distinkt sind. Eine Studie, die dieser noch offenen Frage nachging, ist die Metaanalyse von Hawes et al. (2019). Darin wird der Erklärungsansatz über die neuroanatomische Nähe bestärkt und insbesondere die Mengenverarbeitung gleichsam wie die visuell-räumliche Verarbeitung im IPS lokalisiert.

Der dritte Erklärungsansatz für den Zusammenhang zwischen Raum und Zahl liefern Arbeiten zum Arbeitsgedächtnis. Sowohl der verbale als auch der visuell-räumliche Arbeitsspeicher sind maßgeblich beim Lösen komplexer Rechenaufgaben beteiligt. Da der visuell-räumliche Arbeitsspeicher auch für die Bearbeitung räumlicher Aufgaben (z. B. mentale Rotationen) benötigt wird, liegt hier ein weiterer indirekter Erklärungsansatz vor. Da die Befundlage dazu noch sehr widersprüchlich ist, wurde dieser Erklärungsansatz in Abschnitt 2.3 ausführlicher behandelt. Es gibt hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Arbeitsspeicher und Arithmetik noch sehr viel Variabilität, die in jüngeren Studien durch Einflussgrößen wie die Art der Rechenoperation, dem Alter der Probend*innen, der Subdomänen des Arbeitsspeichers und der Art der Rechenaufgabe (Kopfrechnen vs. schriftliches Rechnen) erklärt wird. Nichtsdestotrotz scheint es gesichert zu sein, dass der visuell-räumliche Arbeitsspeicher eine nicht unerhebliche Rolle beim Lösen von Rechenaufgaben spielt.

Die Darstellung dieser drei Erklärungsansätze zeigt, dass die Neuro- und Kognitionswissenschaft in den letzten drei Dekaden sehr viel Evidenz zur Theorie der Zahlenverarbeitung und des Rechnens geleistet hat. Daraus ist abzuleiten, dass visuell-räumliche Fähigkeiten eine für das Rechnen zentrale, domänenübergreifende Kognition ist, der auch im Unterricht (mehr) Aufmerksamkeit gewidmet werden sollte.

Ein weiteres Ziel des Beitrags bestand darin, die Ergebnisse aus der Psychologie friedvoll mit fachdidaktischen Konzepten zu vereinen. Dabei wird ersichtlich, dass die aus der Kognitionswissenschaft stammenden mentalen Repräsentationen, die wir benötigen, um Gedanken konkret werden zu lassen, auch in der (deutschsprachigen) Mathematikdidaktik in Form von Grundvorstellungen längst etabliert sind. Dabei gibt es individuelle Grundvorstellungen, die im Wesentlichen nichts anderes sind, als subjektive Schüler*innenvorstellungen mathematischer Objekte und die häufig auch mathematisch unkorrekt sind und daher als Fehlvorstellungen bezeichnet werden. Normative Grundvorstellungen hingegen sind tatsächlich mentale Repräsentationen gedanklicher mathematischer Objekte (Begriffe, Ideen, …), an die auch hohe fachliche Anforderungen gestellt werden. So müssen normative Grundvorstellungen isomorph zum jeweiligen gedanklichen Konstrukt sein, in anderen Worten, es muss Strukturgleichheit bestehen. Trotz der Tatsache, dass es das Grundvorstellungskonzept schon seit Jahrzehnten gibt und es dazu auch zahlreiche Fortschritte gab, gibt es hierzu nach wie vor offene Fragen und Forschungsbedarf. So existieren beispielsweise noch nicht für alle schulmathematischen Bereiche Grundvorstellungsbeschreibungen. Während die Bereiche Zahlen, Größen, Funktionen und Analysis sehr gut beschreiben sind, sind die Forschungsergebnisse in den Bereichen Geometrie, lineare Algebra und Stochastik noch rar (siehe z. B. vom Hofe 2016).

Insbesondere jedoch besteht hinsichtlich des hier vorgestellten Ansatzes bezüglich des Grundvorstellungskonzepts noch Forschungsbedarf. Heinz Griesel schrieb dazu in seiner letzten wissenschaftlichen Publikation gemeinsam mit seinen Kollegen vom Hofe und Blum (2019, S. 131) sehr treffend: „Weiterer Forschungsbedarf besteht auch in der Frage, in welcher Beziehung das stoffdidaktische Grundvorstellungskonzept zu anderen, international verbreiteten Konzepten mentaler Repräsentationen aus Didaktik und Psychologie steht und inwieweit hier mögliche Verbindungen zu Weiterentwicklungen führen können“. Verwiesen wird auch hier auf bereits bestehende Konzepte wie z. B. „intuitive meaning“ bei Fischbein (1989) bzw. „concept image“ bei Tall und Vinner (1981). Obwohl es dazu bereits Ansätze in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik gibt (vom Hofe & Blum 2016; Prediger 2009), steht eine umfangreiche und differenzierte Aufarbeitung dieses Themas noch aus.

Griesel und Kollegen (2019, S. 131) schlagen für neue Erkenntnisse der Grundvorstellungstheorie unter anderem eine Sichtung von Ergebnissen der kognitiven *Schema*-Theorie wie auch der *Frame*-Theorie vor. Das große Potential des Grundvorstellungskonzepts besteht unter anderem auch darin, dass es einerseits stoffdidaktische Prinzipien weiterführt und andererseits offen für neuere Methoden, Theorien und Forschungsparadigmen ist (Griesel et al. 2019, S. 131). Ein weiteres bislang noch dünn beforschtes, aber nicht zu verachtendes Anwendungsgebiet des Grundvorstellungskonzepts ist der konstruktive Einsatz in der Diagnostik und Förderung. Umfangreiche Ansätze und Ideen finden sich dazu in Wartha und Schulz (2011).

Insbesondere aber kann das Grundvorstellungskonzept, wie im vorliegenden Beitrag gezeigt, eine Verbindung zwischen psychologischen und mathematischen Sichtweisen herstellen und sollte allein deshalb Gegenstand weiterer fachdidaktischer Forschungsbemühungen sein. Nach Ansicht von Griesel und Kollegen (2019, S. 131) handelt es sich einstweilen noch überwiegend um Theorien (Theorie der mental number line, Theorie der Grundvorstellungen, Theorie mentaler Repräsentationen zu gedanklichen Konstrukten), die sich erst empirisch durch erfolgreiche Anwendung in Unterrichtspraxis, Curriculumentwicklung und Einzelexperiment bewähren muss.

4.1 Ableitungen für die Praxis

Dass Raumvorstellung für Geometrie eine wichtige Rolle spielt, scheint außer Zweifel zu stehen. Die hier vorgestellten Ergebnisse signalisieren jedoch, wie bedeutsam Raumvorstellung auch für die Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten ist. Schon Radatz und Rickmeyer (1991) konstatieren, dass die Förderung der Raumvorstellung eines der obersten Ziele des grundschulischen Geometrieunterrichts darstellen sollte. Die Ergebnisse der Kognitions- und Neurowissenschaften der letzten drei Jahrzehnte hinsichtlich der Zahlenverarbeitung und des Rechnens zeigen, wie relevant visuell-räumliche Fähigkeiten auch außerhalb der Geometrie sind. Dadurch wird die Empfehlung von Radatz und Rickmeyer nur nochmals unterstrichen.

In Anbetracht der referierten Befunde wird ein frühes (spielerisches) Schulen der Raumvorstellung empfohlen, um einerseits den Aufbau mentaler Repräsentationen von Zahlen zu erleichtern und andererseits auch den visuell-räumlichen Arbeitsspeicher zu trainieren. Ideen dazu sind beispielsweise kopfgeometrische Aufgaben, mentale Rotationen, mentale Translationen usw. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass alle Faktoren der Raumvorstellung (räumliche Wahrnehmung, Veranschaulichung, räumliche Beziehungen und räumliche Orientierung nach Franke 2007, S. 56) im Unterricht abgedeckt werden. An dieser Stelle sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass es auch noch andere Faktormodelle zur Beschreibung der Raumvorstellung gibt. So beschreibt beispielsweise Maier (1999, S. 51) ein Raumvorstellungsmodell mit fünf Faktoren, das zusätzlich zu den vier genannten noch den Faktor mentale Rotationen beinhaltet. Darüber hinaus gibt es in der Raumvorstellungsforschung auch noch zahlreiche weitere Modelle, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

Ferner sei davor gewarnt, dass der mentale Zahlenstrahl etwa durch verstärkte Übungen am Zahlenstrahl geschult werden kann. Der mentale Zahlenstrahl baut sich durch eine fundamentale Mengenvorstellung auf. Das heißt, dass Zahlen eben gerade nicht ausschließlich als Positionen entlang einer Linie mit bestimmten Zahlwörtern gedacht werden, sondern dass mit der Zahl eine Menge assoziiert wird und sich schließlich ein relationaler Zahlaspekt einstellt (vgl. 3-Ebenenmodell von Krajewski 2003). Ein verfrühtes und alleiniges Üben mit dem Zahlenstrahl würde den ordinalen Zahlaspekt überbewerten und schließlich zu verstärktem zählenden Rechnen führen. Um einen relationalen Zahlaspekt zu generieren, ist es wichtig frühzeitig mit didaktischem Erarbeitungsmaterial enaktive Repräsentationen aufzubauen, die den Kindern dabei helfen, Beziehungen zwischen den Zahlen zu erkennen. Ein Beispiel dafür ist etwa die Methode *Kraft der 5*, bei der die Kinder mit ihren Fingern Relationen zwischen den Zahlen aufbauen können und diese dann als ikonische Repräsentationen abspeichern und schließlich symbolisch für effiziente (nichtzählende) Rechenstrategien nutzen können. Unter dem mentalen Zahlenstrahl versteht man also nicht den klassischen Zahlenstrahl, der dann durch wiederholtes Üben als Hilfsmittel verstanden wird, sondern eine tragfähige und umfangreiche Zahlen-Größen Vorstellung, die es später beispielsweise ermöglicht, die Rechnung 298 + 302 als sehr einfach anzusehen. Da es den Umfang des Beitrags sprengen würde, wird an dieser Stelle nicht weiter auf didaktische Umsetzungsmöglichkeiten eingegangen. Für einen Überblick siehe z. B. Hasemann und Gasteiger (2020). Zudem wird auf die Homepage PIKAS (https://pikas.dzlm.de) und KIRA (https://kira.dzlm.de) verwiesen, wo sich zahlreiche evidenzbasierte Ideen zur praktischen Umsetzung des Aufbaus eines tragfähigen Zahlbegriffs finden.

Abschließend wird noch auf das didaktisch relevante Grundvorstellungskonzept hingewiesen. Bei der Einführung neuer mathematischer Inhalte (Begriffe) sollten individuelle Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler beobachtet und dokumentiert werden, um darauf aufbauend normative Grundvorstellungen zu generieren. Nur wenn etwaige Fehlvorstellungen transparent werden, ist es möglich diese auszuräumen und mathematisch korrekte, tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen. Möglichkeiten subjektive Schüler*innenvorstellungen (individuelle Grundvorstellungen) sichtbar zu machen bestehen beispielsweise darin, die Schüler*innen selbst Zeichnungen dazu anfertigen zu lassen (Oehl 1962, 1965; Griesel et al. 2019, S. 128) oder sie über ihren Lösungsweg zu befragen. Hier steht immer der Prozess im Vordergrund, die Schüler*innen sollen also in eignen Worten erklären, wie sie zur Lösung kommen bzw. welche Gedanken sie dabei haben.

Festzuhalten ist, dass normative Grundvorstellungen gerade im Grundschulalter immer aus der konkreten Handlung heraus aufgebaut werden müssen. Beginnt man beispielsweise ein neues Thema gleich mit dem Schulbuch und überspringt somit (vielleicht aus zeitökonomischen Gründen) die enaktive Phase, führt man den Großteil der Kinder in eine nicht zu bewältigende Abstraktion. Letzteres führt in der Regel dann zu Unverständnis und Frustration. Geht man jedoch den didaktisch (und auch entwicklungspsychologisch) sinnvollen Weg über die Phase der konkreten Handlung, erkennt man, dass auch hier Raumvorstellung eine zentrale Rolle spielt. Denn jedwedes didaktische Arbeitsmaterial ist räumlicher Natur und genau durch dieses haptische Material werden abstrakte mathematische Konzepte für die Kinder erst *greifbar* und *konkret*. Tragfähige Grundvorstellungen etablieren sich also (zumindest im Grundschulbereich) aus der Handlung an *räumlichen* didaktischen Materialien. Hierbei sei abschließend noch erwähnt, dass bei der Arbeit mit didaktischem Material der rechtzeitige Entzug des Materials zu beachten ist. Das zu lange verwenden von Erarbeitungsmaterial birgt die Gefahr, dass der Übergang von konkreten zu abstrakten Repräsentationen verzögert werden kann (Lorenz 2005). Für den Übergang von der konkreten Arbeit am Material hin zur mentalen Repräsentation wird die Vorgangsweise über das sogenannte *Vier-Phasenmodell* (Wartha & Schulz 2011) empfohlen. In diesem Zusammenhang ist noch zu betonen, dass das „Entfernen des Materials“ keinesfalls bedeutet, dass nicht von einem höheren Standpunkt aus wieder auf das Material zurückgegriffen werden soll. Sehr treffend ist hierzu folgendes Zitat von Häsel-Weide et al. (2014, S. 114): „Der Weg der Verinnerlichung führt nie nur vom Material weg, sondern immer wieder auf das Material zurück, um am Material zu erklären, etwas darzustellen oder zu argumentieren.“ Ein konkretes Beispiel hierfür wäre: Wenn es ein Kind schafft, den Übertrag beim schriftlichen Rechnen anhand von Material zu erklären, dann kann davon ausgegangen werden, dass dieses Kind den Übertrag tatsächlich verstanden hat. Ein weiteres Beispiel für die Sekundarstufe I könnte folgend aussehen: Die symbolische Darstellung einer geraden Zahl ist $2n,\ n \in \mathbb{N}$, die einer ungeraden Zahl $2n + 1,\ n \in \mathbb{N}$. Wenn es den Schüler*innen nun gelingt, diesen Sachverhalt durch eine Materialhandlung darzustellen (etwa durch das Bauen eines Würfelturms dessen Grundfläche 2x1 ist und der bei geraden Zahlen oben flach ist und bei ungeraden oben gestuft ist), kann auch hier auf ein tiefes Verständnis geschlossen werden.

Insgesamt wurde in diesem Beitrag versucht, die umfassende Rolle der Raumvorstellung beim Lernen (früher) zentraler mathematischer Inhalte darzustellen. Dabei sind Ergebnisse der Psychologie ebenso eingeflossen wie Konzepte aus der Mathematikdidaktik. Das Hauptziel bestand darin, Resultate aus der kognitions- und neurowissenschaftlichen Grundlagenforschung sichtbar zu machen und diese praxisnah abzubilden. Da es nicht das Mandat des Beitrags war, ausführliche Lernumgebungen zu beschreiben, wurde der letzte Abschnitt bewusst kurzgehalten. Hier sollten lediglich Ableitungen für den Unterricht skizziert und Tipps für weiterführende Literatur gegeben werden.

Literatur

Ansari, D., & Dhital, B. (2006): Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: an event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of cognitive neuroscience*, *18*(11), 1820-1828.

Baddeley, A. (2000): The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in cognitive sciences*, *4*(11), 417-423.

Baddeley, A. D. (1986): Working memory. Clarendon, Oxford.

Bailey, D. H., Littlefield, A., & Geary, D. C. (2012): The codevelopment of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(1), 78-92.

Bethell-Fox, C. E., & Shepard, R. N. (1988): Mental rotation: Effects of stimulus complexity and familiarity. *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance, 14*(1), 12–23.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008): Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79*(4), 1016–1031.

Brod, G., Bunge, S. A., & Shing, Y. L. (2017): Does one year of schooling improve children's cognitive control and alter associated brain activation? *Psychological science*, *28*(7), 967-978.

Bruner, J. S. (1964): The course of cognitive growth. *American psychologist*, *19*(1), 1-16.

Butterworth, B. (1999): *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Campbell, J. I., & Clark, J. M. (1992): Cognitive number processing: An encoding-complex perspective. In *Advances in psychology* (Vol. 91, pp. 457-491). North-Holland.

Carroll, J. B. (1993): Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor- Analytic Studies. Cambridge University Press.

Case, R., & Okamoto, Y. (1996): The role of central conceptual structures in the development of children's thought. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *61*(1–2), Serial No. 246.

Casey, M. B., Nuttall, R., Pezaris, E., & Benbow, C. P. (1995): The influence of spatial ability on gender differences in mathematics college entrance test scores across diverse samples. *Developmental psychology*, *31*(4), 697.

Cattaneo, L., Caruana, F., Jezzini, A., & Rizzolatti, G. (2009): Representation of goal and movements without overt motor behavior in the human motor cortex: a transcranial magnetic stimulation study. *Journal of Neuroscience*, *29*(36), 11134-11138.

Cox, J. W. (1928): Mechanical aptitude. Methuen.

Cragg, L., Richardson, S., Hubber, P. J., Keeble, S., & Gilmore, C. (2017): When is working memory important for arithmetic? The impact of strategy and age. *PloS one*, *12*(12), e0188693.

Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1-2), 1-42.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn – Oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Dehaene, S. (2013): *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Springer-Verlag.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995): Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition*, *1*(1), 83-120.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997): Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, *33*(2), 219-250.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2005): Three parietal circuits for number processing. In *The handbook of mathematical cognition* (pp. 433-453). Psychology Press.

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., & Benke, T. (2003): Learning complex arithmetic - an fMRI study. *Cognitive Brain Research*, *18*(1), 76-88.

Delgado, A. R., & Prieto, G. (2004): Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence, 32*(1), 25–32.

Desco, M., Navas-Sanchez, F. J., Sanchez-González, J., Reig, S., Robles, O., Franco, C., ... & Arango, C. (2011): Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluid reasoning tasks. *Neuroimage*, *57*(1), 281-292.

Dietrich, J. F., Huber, S., & Nuerk, H. C. (2015): Methodological aspects to be considered when measuring the approximate number system (ANS) – a research review. *Frontiers in Psychology*, *17*(6), 295.

Fias, W., & Fisher, M. H. (2005): Spatial representation of numbers. In J. I. D. Campbell (Hrsg.), *Handbook of mathematical cognition* (S. 43–54). Hove: Psychology Press.

Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013): Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in neuroscience and education*, *2*(2), 43-47.

Fincham, J. M., Carter, C. S., van Veen, V., Stenger, V. A., & Anderson, J. R. (2002): Neural mechanisms of planning: a computational analysis using event-related fMRI. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *99*(5), 3346-3351.

Fischbein, E. (1989): Tacit models and mathematic reasoning. *For the Learning of Mathematics*, *9*, 9–14.

Fischer, U., & Moeller, K. (2014): Aktuelle Befunde zu Zahlenstrahltrainings – Verschiedene Ansätze und deren Wirksamkeit. In G. Schulte-Körne (Hrsg.), *Legasthenie und Dyskalkulie – Neue Methoden zur Diagnostik und Förderung* (S. 33–47). Bochum: Winkler.

Fischer, U., Moeller, K., Cress, U., & Nuerk, H. C. (2011): Embodied spatial numerical training of number magnitude representation – an intervention study. *Psychonomic Bulletin & Reviews*, *18*, 177–183.

Fischer, U., Moeller, K., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2013): Interventions supporting children’s mathematics school success: a meta-analytic review. *European Psychologist*, *18*(2), 89–113.

Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen. Seelze: Kallmeyer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2007): *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Gaidoschik, M. (2015): Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *36*(1), 163–190.

Geer, E. A., Quinn, J. M., & Ganley, C. M. (2019): Relations between spatial skills and math performance in elementary school children: A longitudinal investigation. *Developmental Psychology, 55*(3), 637.

Gerstmann, J. (1940): Syndrome of finger agnosia, disorientation for right and left, agraphia and acalculia: Local diagnostic value. *Archives of Neurology & Psychiatry*, *44*(2), 398-408.

Göbel, S. M., Calabria, M., Farne, A., & Rossetti, Y. (2006): Parietal rTMS distorts the mental number line: simulating ‘spatial’neglect in healthy subjects. *Neuropsychologia*, *44*(6), 860-868.

Göbel, S. M., Shaki, S., & Fischer, M. H. (2011): The cultural number line: a review of cultural and linguistic influences on the development of number processing. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, *42*(4), 543–565.

Göbel, S., Walsh, V., & Rushworth, M. F. (2001): The mental number line and the human angular gyrus. *NeuroImage*, *14*(6), 1278-1289.

Gordon, R., Santana De Morais, D., Whitelock, E., & Mukarram, A. (2022): Mapping components of verbal and visuospatial working memory to mathematical topics in seven-to fifteen-year-olds. *British Journal of Educational Psychology*, *92*(1), 1-18.

Graß, K.-H., & Krammer, G. (2018): Direkte und indirekte Einflüsse der Raumvorstellung auf die Rechenleistungen am Ende der Grundschulzeit. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *39*(1), 43-67.

Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019): Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(1), 123-133.

Gross, J., Hudson, C., & Price, D. (2009): The long-term costs of numeracy difficulties. Every child a chance trust and KPMG.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012): The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental Psychology, 48*(5), 1229–1241.

Hackman, D. A., & Farah, M. J. (2009): Socioeconomic status and the developing brain. *Trends in cognitive sciences*, *13*(2), 65-73.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014): *Ablösung vom zählenden Rechnen.*

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2020): *Anfangsunterricht Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg.

Hawes, Z. & Ansari, D. (2020): What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review, 27*, 465-482.

Hawes, Z., Sokolowski, H. M., Ononye, C. B., & Ansari, D. (2019): Neural underpinnings of numerical and spatial cognition: An fMRI meta-analysis of brain regions associated with symbolic number, arithmetic, and mental rotation. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *103*, 316-336.

Holmes, G. (1918): Disturbances of visual orientation. *The British journal of ophthalmology*, *2*(9), 449.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005): Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, *6*(6), 435-448.

Jolles, D., Supekar, K., Richardson, J., Tenison, C., Ashkenazi, S., Rosenberg-Lee, M., ... & Menon, V. (2016): Reconfiguration of parietal circuits with cognitive tutoring in elementary school children. *Cortex*, *83*, 231-245.

Jordan, K., Heinze, H. J., Lutz, K., Kanowski, M., & Jäncke, L. (2001): Cortical activations during the mental rotation of different visual objects. *Neuroimage*, *13*(1), 143-152.

Judd, N., & Klingberg, T. (2021): Training spatial cognition enhances mathematical learning in a randomized study of 17,000 children. *Nature Human Behaviour*, *5*(11), 1548-1554.

Kadosh, R. C., Henik, A., Rubinsten, O., Mohr, H., Dori, H., Van De Ven, V., ... & Linden, D. E. (2005): Are numbers special? The comparison systems of the human brain investigated by fMRI. *Neuropsychologia*, *43*(9), 1238-1248.

Kadosh, R. C., Lammertyn, J., & Izard, V. (2008): Are numbers special? An overview of chronometric, neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in neurobiology*, *84*(2), 132-147.

Karmiloff-Smith, A. (1992): *Beyond modularity – a developmental perspective on cognitive science*. Cambridge: MIT Press.

Kovas, Y., & Plomin, R. (2006): Generalist genes: implications for the cognitive sciences. *Trends in cognitive sciences*, *10*(5), 198-203.

Krajewski, K. (2003): *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburge: Kovač.

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... & von Aster, M. (2011): Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *57*(3), 782-795.

Landerl, K., & Kaufmann, L. (2013): Dyskalkulie: Modelle. *Diagnostik, Intervention*. UTB-Verlag.

Landerl, K., Vogel, S., & Kaufmann, L. (2022): *Dyskalkulie: Modelle, Diagnostik, Intervention*. UTB.

Li, Y., & Geary, D. C. (2013): Developmental gains in visuospatial memory predict gains in mathematics achievement. *PloS one*, *8*(7), e70160.

Liang, Z., Dong, P., Zhou, Y., Feng, S., & Zhang, Q. (2022): Whether verbal and visuospatial working memory play different roles in pupil's mathematical abilities. *British Journal of Educational Psychology*, *92*(2), 409-424.

Lindemann, O., & Fischer, M. H. (2015): Cognitive foundations of human number representations and mental arithmetic. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The oxford handbook of numerical cognition* (S. 35–44). Oxford: Oxford University Press.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development, 56*(6), 1479–1498.

Logie, R. H., Gilhooly, K. J., & Wynn, V. (1994): Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory & cognition*, *22*, 395-410.

Lorenz, J. H. (2005): Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*, 165-177.

Lorenz, J. H. (2017): Einige Anmerkungen zur Repräsentation von Wissen über Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(1), 125-139.

Lyons, I. M., Nuerk, H. C., & Ansari, D. (2015): Rethinking the implications of numerical ratio effects for understanding the development of representational precision and numerical processing across formats. *Journal of Experimental Psychology: General*, *144*(5), 1021–1035.

Lyons, I. M., Vogel, S. E., & Ansari, D. (2016): On the ordinality of numbers: A review of neural and behavioral studies. *Progress in brain research*, *227*, 187-221.

Maier, P. H. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen: ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen: mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht.* Donauwörth: Auer.

Matejko, A. A., & Ansari, D. (2015): Drawing connections between white matter and numerical and mathematical cognition: a literature review. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *48*, 35-52.

Mayer, E., Martory, M. D., Pegna, A. J., Landis, T., Delavelle, J., & Annoni, J. M. (1999): A pure case of Gerstmann syndrome with a subangular lesion. *Brain*, *122*(6), 1107-1120.

McCloskey, M. (1992): Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, *44*(1-2), 107-157.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985): Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, *4*(2), 171-196.

McKenzie, B., Bull, R., & Gray, C. (2003): The effects of phonological and visual–spatial interference on children's arithmetical performance. *Educational and Child Psychology, 20*, 93−108.

Mix, K. S., & Cheng, Y.-L. (2012): The relation between space and math: developmental and educational implications. *Advances in Child Development and Behavior, 42*, 197–243.

Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H. C., & Cress, U. (2015): Computers in mathematics education – training the mental number line. *Computers in Human Behavior*, *48*, 597–607.

Morra, S., Gobbo, C., Marini, Z., & Sheese, R. (2008): *Cognitive development – neopiagetion perspectives*. New York: Lawrence Erlbaum.

Newcombe, N. S., & Shipley, T. F. (2015): Thinking about spatial thinking: New typology, new assessments. *Studying Visual and Spatial Reasoning for Design Creativity*, 179–192.

Nieder, A., & Dehaene, S. (2009): Representation of number in the brain. *Annual review of neuroscience*, *32*, 185-208.

Noël, M. P., Désert, M., Aubrun, A., & Seron, X. (2001): Involvement of short-term memory in complex mental calculation. *Memory & cognition*, *29*(1), 34-42.

Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2004): Externe und interne Repräsentation von Zahlen und ihre Beeinflussung durch sprachliche Struktur. *Medialität und Mentalität; Linz, E., Jager Hrsg, L., Eds*, 251-274.

Nuerk, H. C., Graf, M., & Willmes, K. (2006): Grundlagen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens. *Sprache· Stimme· Gehör*, *30*(04), 147-153.

Nuerk, H. C., Wood, G., & Willmes, K. (2005): The universal SNARC effect: the association between number magnitude and space is amodal. *Experimental Psychology*, *52*, 187–194.

Obersteiner, A., Reiss, K., & Ufer, S. (2013): How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction*, *23*, 125–135.

Oehl, W. (1962): *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

Oehl, W. (1965): *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel.

Owen, A. M., McMillan, K. M., Laird, A. R., & Bullmore, E. (2005): N-back working memory paradigm: A meta-analysis of normative functional neuroimaging studies. *Human brain mapping*, *25*(1), 46-59.

Palmer, S. (2000): Working memory: A developmental study of phonological recoding. *Memory, 8,* 179– 193.

Parsons, S., & Bynner, J. (2005): Does numeracy matter more?

Paterson, D. G., Elliot, R., Anderson, L. D., Toops, H. A., & Heidbreder, E. (1930): Minnesota mechanical ability tests: The report of a re- search investigation subsidized by the committee on human migrations of the national research council and conducted in the department of psychology of the University of Minnesota. University of Minnesota Press.

Patro, K., Nuerk, H. C., & Cress, U. (2015): Does your body count? Embodied influences on the preferred counting direction of preschoolers. *Journal of Cognitive Psychology*, *27*(4), 413–425.

Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004): Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron*, *41*(6), 983-993.

Polspoel, B., Peters, L., Vandermosten, M., & De Smedt, B. (2017): Strategy over operation: neural activation in subtraction and multiplication during fact retrieval and procedural strategy use in children. *Human Brain-Mapping*, *38*(9), 4657-4670.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematik-unterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213–234). Weinheim: Beltz.

Radatz, H., & Rickmeyer, K. (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Reinert, R. M., Huber, S., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2015a): Multiplication facts and the mental number line: evidence from unbounded number line estimation. *Psychological Research*, *79*(1), 95–103.

Reinert, R. M., Huber, S., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2015b): Strategies in unbounded number line estimation? Evidence from eye-tracking. *Cognitive Processing*, *16*(1), 359–363.

Roggeman, C., Fias, W., & Verguts, T. (2015): Basic number representation and beyond: neuroimaging and computational modelling. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The oxford handbook of numerical cognition* (S. 566–582). Oxford: Oxford University Press.

Rumelhart, D. E. (1980): Schemata: the building blocks of cognition. In R. J. Spiro, B. C. Bruce & W. F. Brewer (Hrsg.), *Theoretical issues in reading comprehension* (S. 33–58). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Seel, N. M. (2003): Psychologie des Lernens (2. akt. u. erw. Aufl.). *Ernst Reinhardt (UTB): München*.

Seydell-Greenwald, A., Ferrara, K., Chambers, C. E., Newport, E. L., & Landau, B. (2017): Bilateral parietal activations for complex visual-spatial functions: Evidence from a visual-spatial construction task. *Neuropsychologia*, *106*, 194-206.

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971): Mental rotation of three- dimensional objects. *Science, 171*(3972), 701–703.

Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998): SCADS: a model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science*, *9*(5), 405–410.

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003): The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science*, *14*(3), 237-250.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008): Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science*, *11*(5), 655–661.

Simon, O., Mangin, J. F., Cohen, L., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2002): Topographical layout of hand, eye, calculation, and language-related areas in the human parietal lobe. *Neuron*, *33*(3), 475-487.

Smith, E. E., & Jonides, J. (1999): Storage and executive processes in the frontal lobes. *Science*, *283*(5408), 1657-1661.

Sokolowski, H. M., Fias, W., Mousa, A., & Ansari, D. (2017): Common and distinct brain regions in both parietal and frontal cortex support symbolic and nonsymbolic number processing in humans: A functional neuroimaging meta-analysis. *Neuroimage*, *146*, 376-394.

Sommerauer, G., Graß, K.-H., Grabner, R. H., & Vogel, S. E. (2020): The semantic control network mediates the relationship between symbolic numerical order processing and arithmetic performance in children. *Neuropsychologia*, *141*, 107405.

Stengel, E. (1944): Loss of spatial orientation, constructional apraxia, and Gerstmann's syndrome. *Journal of Mental Science*, *90*(380), 753-760.

Szűcs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2014): Cognitive components of a mathematical processing network in 9-year-old children. *Developmental science*, *17*(4), 506-524.

Tall, D., & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–165.

Thurstone, L. L., & Thurstone, T. G. (1941): Factorial studies of intelli- gence. *Psychometric Monographs, 2*, 94.

Tronsky, L. N. (2005): Strategy use, the development of automaticity, and working memory involvement in complex multiplication. *Memory & Cognition*, *33*, 927-940.

Uttal, D. H., Miller, D. I., & Newcombe, N. S. (2013): Exploring and enhancing spatial thinking: Links to achievement in science, technology, engineering, and mathematics? *Current Directions in Psychological Science*, *22*(5), 367-373.

Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2015): Verbal and visual-spatial working memory and mathematical ability in different domains throughout primary school. *Memory & cognition*, *43*, 367-378.

van Dijck, J.-P., Ginsburg, V., Girelli, L., & Gevers, W. (2015): Linking numbers to space: from the mental number line towards a hybrid account. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The oxford handbook of numerical cognition* (S. 89–105). Oxford: Oxford University Press.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. (2017): Links between spatial and mathematical skills across the preschool years. *Monographs of Society for Research in Child Development, 82*(1), 7–30.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S., & Bailey, D. H. (2017): Links between spatial and mathematical skills across the preschool years. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *82*(1), 1-149.

Verguts, T., Fias, W., & Stevens, M. (2005): A model of exact small-number representation. *Psychonomic bulletin & review*, *12*, 66-80.

Vogel, S. E., & De Smedt, B. (2021): Developmental brain dynamics of numerical and arithmetic abilities. *npj Science of Learning*, *6*(1), 22.

vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Springer Spektrum.

vom Hofe, R., & Blum, W. (2016): "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(Supplement 1), 225–254.

Walsh, V. (2003): A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in cognitive sciences*, *7*(11), 483-488.

Ward, J. (2006): *The student's guide to cognitive neuroscience*. New York: Psychology Press.

Wartha, S., & Schulz, A. (2011): *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Kiel: IPN. Publikation des Programms SINUS an Grundschulen.

Zacks, J. M. (2008): Neuroimaging studies of mental rotation: a meta-analysis and review. *Journal of cognitive neuroscience*, *20*(1), 1-19.

Zhang, X., Koponen, T., Räsänen, P., Aunola, K., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2014): Linguistic and spatial skills predict early arithmetic development via counting sequence knowledge. *Child Development, 85*(3), 1091–1107.

Zorzi, M., Priftis, K., & Umiltà, C. (2002): Neglect disrupts the mental number line. *Nature*, *417*(6885), 138-139.

Verfasser

Karl-Heinz Graß
Pädagogische Hochschule Steiermark
Institut für Elementar- und Primarpädagogik
Hasnerplatz 10
8010 Graz

karl1.grass@phst.at

Mathematikkompetenzen messen in Österreich: Rückblick und Ausblick

MARCEL ILLETSCHKO (IQS), ALEXANDER AICHINGER (IQS)

Die Hinwendung zum Paradigma der Kompetenzorientierung in Schulsystemen ist verbunden mit der Etablierung verschiedener Instrumente zur Messung von Kompetenzen. In Österreich sind für den Bereich der Mathematik vor allem die internationalen Studien PISA und TIMMS zu nennen, aber auch die nationalen Bildungsstandardsüberprüfungen und die neu entwickelte iKM^{PLUS}. Die Grundlagen dieser Instrumente sollen vorgestellt und ein kurzer Überblick über die wichtigsten Ergebnisse, Beispiele für vertiefende fachdidaktische Analysen und ein Ausblick auf die Vorhaben des nächsten Jahrzehnts gegeben werden.

Der Beitrag ist online unter: https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/

Motivierung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts-Ziele, Hürden und Konzepte

JAKOB KELZ, JENNIFER ESSER, SARAH K. OBERLOJER, KLAGENFURT

Geschlechtsspezifische Unterschiede, die sich in der mathematischen Leistung bei PISA, den Bildungsstandards oder der standardisierten Reife- und Diplomprüfung in Österreich meist zugunsten der Jungen zeigen, motivieren in Zukunft das Gesamtpotential der Mädchen mehr und mehr auszuschöpfen. Weiter vorantreiben könnte dies der *genderkompetente Mathematikunterricht*, dessen Ziele von mehreren Interessensgruppen gesetzt wurden. Die Umsetzung dieser Ziele ist mit Hürden verbunden. Dieser Beitrag versucht aus diesem Diskurs heraus, Komponenten eines genderkompetenten Mathematikunterrichts, wie Interaktionen zwischen Lehrpersonen und Lernenden, Sprache, Methodik und Themen, aufzuzeigen. Dieser Artikel beruht auf dem Vortrag von Jakob Kelz bei der ÖMG-Tagung in Wien, sowie auf der von ihm betreuten gemeinsam verfassten Masterarbeit von Jennifer Esser und Sarah Katharina Oberlojer.

1. Einleitung

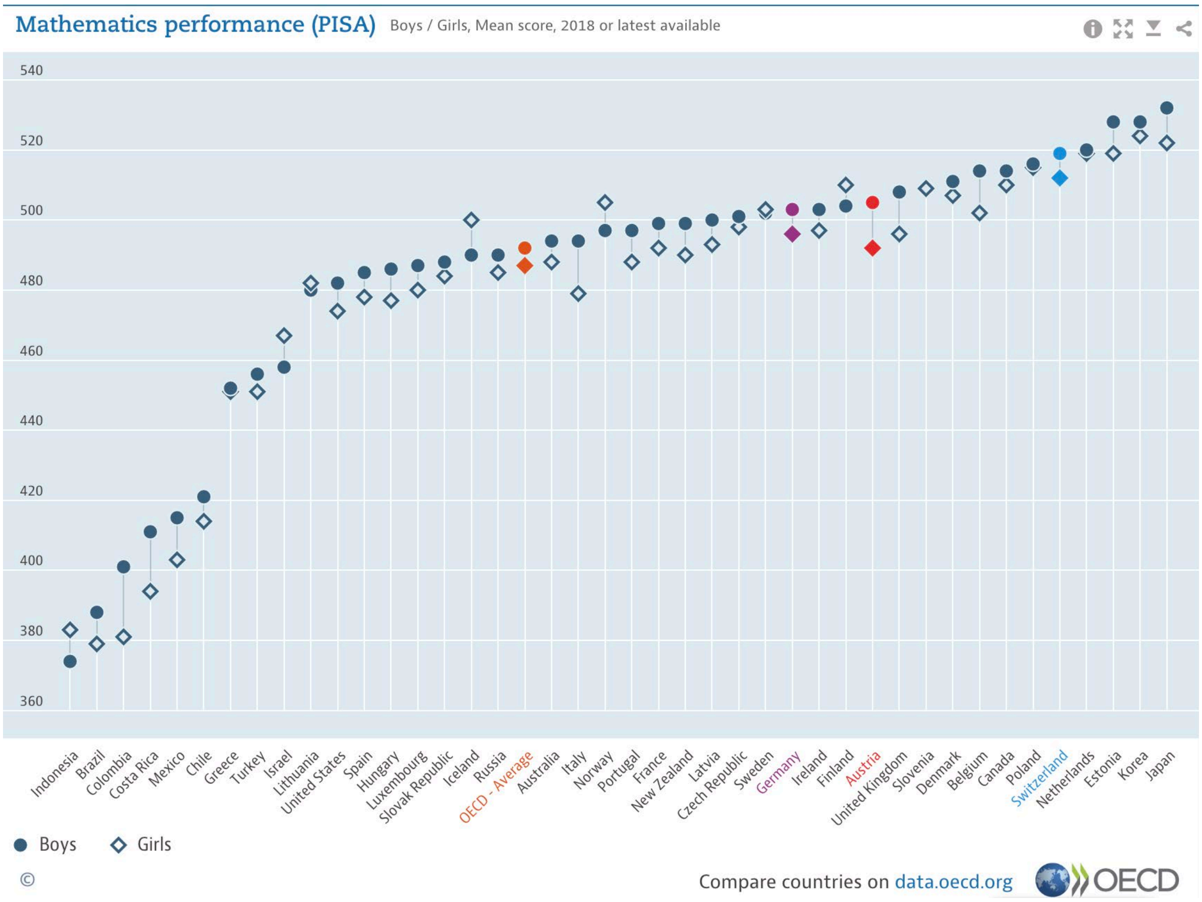
1.1 Warum ist das Konstrukt Gender bedeutsam?

Die Schule trägt einen großen Teil zur Entwicklung, aber auch zur Geschlechteridentifizierung der Heranwachsenden bei. Durch kontinuierliches Feedback von Erwachsenen und Mitschülerinnen und Mitschülern bekommt jedes Kind eine individuelle Vorstellung davon, wie sein eigenes zukünftiges Leben in Bezug auf die Geschlechtszugehörigkeit aussehen muss. Dabei werden die Heranwachsenden meist in altbekannte Schubladen gesteckt. Dadurch kann es bei den Kindern zu Wahrnehmungsverschiebungen kommen (Manz, 2015). Dass Jungen in der Mathematik bessere Leistungen erzielen und die Stärken der Mädchen eher im Sprachwesen beheimatet sind, hat in den Stereotypen der Gesellschaft schon eine sehr lange Tradition (Hermann, 2020). Heutzutage ist es von Bedeutung, nicht nur das biologische Geschlecht zu unterscheiden, sondern auch Geschlechter im sozial-kulturellen Kontext, kurz: Gender, zu betrachten. Die Forschung der Mathematikdidaktik beschäftigte sich in der Vergangenheit mit der biologisch definierten Unterscheidung zwischen Mädchen und Jungen. Der genderkompetente Mathematikunterricht versucht alle biologischen und sozialen Formen des Geschlechts miteinzubeziehen, auch wenn diese Bestrebung noch in Entwicklung ist.

1.2 Mathematische Leistungsunterschiede bei PISA

Genderkompetenter Mathematikunterricht ist ein wichtiger Bereich der Forschung, da es geschlechterspezifische Unterschiede in den mathematischen Leistungen von Mädchen und Jungen gibt. Dies zeigt sich bei der standardisierten Reife- und Diplomprüfung, bei den Bildungsstandards und bei PISA. Die PISA-Studie, von der OECD die alle drei Jahre durchgeführt wird, hat seit über zwei Jahrzehnten das Ziel, die Leistungsfähigkeit von 15-jährigen Lernenden anhand ihrer Lesefähigkeiten, mathematischen Fähigkeiten und naturwissenschaftlichen Kenntnisse zu bewerten. Dabei werden auch die Unterschiede in den mathematischen Leistungen zwischen Mädchen und Jungen untersucht. Von den 40 teilnehmenden OECD- und EU-Ländern wurde in 22 Ländern ein signifikanter Unterschied festgestellt. In diesen Ländern liegt der Durchschnitt der von Jungen erbrachten Mathematikleistungen signifikant höher als der der Mädchen. In vier Ländern schneiden die Mädchen besser ab, während in 14 Ländern kein signifikanter Unterschied festgestellt wurde (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2019).

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S 89 - 100.



F

Abb. 1: Geschlechtsunterschiede in der Mathematikleistung (PISA) (OECD, 2022)

Die Ergebnisse der PISA-Studie vom Jahr 2018 im Bereich Mathematik im Vergleich der Jungen und Mädchen werden in der Abbildung 1 dargestellt. Positiv hervorzuheben ist, dass Österreich mit einem Mathematikmittelwert von 499 Punkten mit 10 Punkten über dem OECD-Schnitt liegt. Der OECD-Schnitt der Geschlechterdifferenz liegt bei 5 Punkten zugunsten der Jungen (OECD, 2022).

1.3 Gender und Mathematikunterricht

Budde (2009) stellte fest, dass eine wesentliche Blockade zur Realisierung gleicher Lernchancen die Annahme, dass Jungen höhere mathematische Fähigkeiten besäßen, sowohl in der Schule als auch im Elternhaus präsent ist. Außerdem bestätigt er, dass geschlechtsbezogene Vorurteile auch bei den Lehrpersonen noch weit verbreitet sind. Dahingehend werden Mädchen als fleißiger und Jungen als kreativer eingeschätzt. Leistungsdefizite werden bei Frauen mit intellektuellen Mängeln und bei Männern mit fehlendem Willen beschrieben. Zudem besteht die Annahme, dass Jungen auch mit größerem Interesse und Motivation an das Fach Mathematik herantreten (Budde, 2009). Jungen besitzen bereits in der Primarstufe ein höheres Selbstkonzept, welches die Einschätzung der eigenen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Fach Mathematik beschreibt (Kelz, 2017). Dies ist gemäß Kelz (2020) ein Schlüssel zur Erklärung von etwaigen Geschlechtsunterschieden in Mathematik. Meist sind die Leistungsunterschiede in der Primarstufe zwar noch sehr gering, wachsen allerdings entlang der Schullaufbahn an (Jungwirth, 2014).

Guter Unterricht hat folglich das Ziel, individualisierend und differenzierend mit der Vielfalt der Lernenden umzugehen. Dahingehend soll allen Lernenden die Chance gegeben werden, in den einzelnen Unterrichtsfächern Kompetenzen aufbauen zu können, welche ihnen eine selbstbewusste Teilhabe an der Gesellschaft ermöglichen. Für diese Teilhabe sind die Lehrpersonen besonders gefragt. Diese sollen neben fachlichen und didaktischen

Kompetenzen auch eine fundierte Gender-Diversitätskompetenz mitbringen. Lehrpersonen haben die Aufgabe, einen bewussten, reflektierten Umgang mit den Geschlechterbildern, Interaktionen und auch Aufgabenstellungen darzubieten, sodass ein reflektierter Umgang sichtbar gemacht wird. Wichtig hierbei ist, dass die Unterschiede weniger beachtet werden sollen, sondern vielmehr die mathematischen Potentiale der Kinder entfaltet werden können. Verschiedene Schülerinnen und Schüler haben unterschiedliche Vorlieben beim Lernen: Manche bevorzugen das Alleinlernen, andere lernen am besten in kleinen Gruppen, während wieder andere besonders gut im direkten Gespräch mit der Lehrkraft lernen. In der Mathematikdidaktik wird heute verstärkt auf eine Vielfalt von Lernformen gesetzt. Dies ist notwendig, da die gewählte Lernform den fachlichen Zielen entsprechen muss. Daher wird das Spektrum der Lernmethoden kontinuierlich erweitert (Jungwirth, 2014). In der schulischen Umgebung zeigt sich eine geschlechtsspezifische Präferenz hinsichtlich des Lernmaterials und der Lernmethoden. Jungen neigen dazu, Schulbücher zu bevorzugen, die eine standardisierte Perspektive auf mathematische Inhalte bieten und klare Schritte zur Durchführung von Verfahren vorgeben. Im Gegensatz dazu ziehen es Mädchen vor, mit individualisierten Heften zu arbeiten und in Gruppen zu agieren. Diese Präferenz gründet sich auf dem Bedürfnis nach Freiheit bezüglich der Umsetzung ihrer Ideen und dem Wunsch, in ihrem eigenen Tempo zu lernen. Mädchen argumentieren, dass diese individuellen Arbeitsweisen ihnen Zugang zu einem tieferen Verständnis ermöglichen, das durch die Arbeit mit Schulbüchern verwehrt bleibt (Boaler, 1997,). Schulbücher vermitteln Lerninhalte effizient, jedoch sprechen sie nicht alle Lerntypen gleichermaßen an. Zudem fehlt oft eine genderneutrale Sprache, was einem genderkompetenten Mathematikunterricht im Weg steht (Jenderek, 2015).

Unter einem genderkompetenten Unterricht versteht Tanzberger (2022), dass Lehrpersonen sich bewusst machen, dass das Geschlecht eine große Rolle in der Gesellschaft, aber natürlich auch in der Schule spielt. Deswegen sind Lehrpersonen aufgefordert darauf zu achten, wo es Einschränkungen und Diskriminierungen aufgrund des Geschlechts geben kann, aber auch wo es zu Stereotypisierung kommen kann. Dahingehend soll dagegen gearbeitet werden, um zu mehr Gleichstellung beitragen zu können, aber auch individuelle Handlungsspielräume schaffen zu können. Diesbezüglich betont die Autorin, dass das Fach Mathematik lange Zeit, aber auch jetzt noch als männliches Fach wahrgenommen wird und dieses Bild des Unterrichtsfaches geändert werden muss (Tanzberger, 2022). Obwohl derzeit keine eindeutigen Beweise für die Wirksamkeit eines genderkompetenten Mathematikunterrichts vorliegen, deuten einige Studien darauf hin, dass ein solcher Ansatz die Einstellung der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik positiv beeinflussen und geschlechtsspezifische Barrieren abbauen könnte. Zum Beispiel zeigt eine Studie von Hwang und Son (2021) einen Zusammenhang zwischen der Einstellung zum Unterrichtsfach Mathematik und den mathematischen Leistungen. Häufig hängen mathematische Leistungen stark von der Einstellung zum Fach ab. Geschlechtsspezifische Unterschiede zeigen sich dabei deutlich, wobei Mädchen oft mit einer Art "Mauer" oder Blockade konfrontiert sind, die es ihnen erschwert, ihr volles mathematisches Potenzial zu entfalten (Matzner & Wyrobnik, 2010). Eine Studie von Durksen, Way, Bobis und Anderson (2018) verweist darauf, dass Schülerinnen und Schüler, die geschlechterstereotype Vorstellungen von Mathematik hatten, tendenziell schlechtere schulische Leistungen erzielen. Durch einen mathematischen Unterricht, der geschlechterspezifische Vorurteile in Frage stellt, besteht die Möglichkeit, die mathematischen Fähigkeiten zu verbessern (Durksen, Way, Bobis & Anderson, 2018). Eine weitere Forschung von Hill, Mammes, Roesken-Winter und van den Heuvel-Panhuizen (2019) verdeutlicht, dass ein geschlechtergerechter Mathematikunterricht dazu beitragen kann, geschlechtsspezifische Unterschiede in den mathematischen Leistungen und Interessen zu minimieren. Allerdings unterstreichen die Autorinnen und Autoren, dass der Erfolg eines geschlechtergerechten Mathematikunterrichts von verschiedenen Faktoren abhängt, einschließlich der Qualifikation und des Engagements der Lehrkräfte (Hill et al., 2019).

In Anbetracht dieser Erkenntnisse unterstreicht dieser Ansatz die Bedeutung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts, da er darauf abzielt, die Einstellung der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik positiv zu beeinflussen, unabhängig von ihrem Geschlecht. Daher erscheint ein genderkompetenter Mathematikunterricht wichtig, um die Chancengleichheit und das Interesse der Schülerinnen und Schüler zu fördern, insbesondere im Hinblick auf Geschlechterunterschiede in Bezug auf die Mathematik.

2 Ziele und Hürden bei der Umsetzung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts

Eine gendersensible Unterrichtsgestaltung ist ein wesentlicher Baustein zur Förderung der Geschlechtergerechtigkeit im Bildungssystem (Jungwirth, 2014). Bei der Umsetzung dieses Ziels treten jedoch zahlreiche Herausforderungen und Schwierigkeiten auf, die es zu bewältigen gilt.

2.1 Ziele

Allgemein lassen sich auf die Frage nach der Gestaltung einer geschlechtergerechten Bildung drei unterschiedliche Perspektiven festlegen. Diese sind die sogenannte Parteilichkeit, die Rede vom „schwachen Geschlecht“ und die Akzentuierung.

- Bei der Parteilichkeit will man zum einen die Mädchen positiv unterstützen und zum anderen den Jungen Grenzen aufzeigen. Bereits im 20. Jahrhundert wurden Maßnahmen, wie Mädchenarbeit oder Frauenbildungsräume gesetzt.
- Beim zweiten Ziel möchte man den Nachteilen und Risiken der Jungenbildung entgegenwirken. Dahingehend werden Bezüge zwischen dem Männlichkeitsbild und der Lernmotivation hergestellt.
- Im letzten Ziel sollen Bildungsorte installiert werden, welche nicht nur die zweigeschlechtliche Ordnung vorsehen, sondern vielmehr die Menschen als Individuen ansehen. Hierbei möchte man sich vom Gedanken, Mädchen verhalten sich typisch weiblich und Jungen typisch männlich, abwenden (Budde & Venth, 2010).

In Bezug auf die Ergebnisse sollten Mathematikinterventionen für Mädchen früh beginnen und sich speziell mit der Steigerung des Selbstvertrauens und der Kontrolle befassen (Rodriguez, Regueiro, Pineiro, Estevez & Valle, 2020). Lehrpersonen können eine offene und respektvolle Klassengemeinschaft fördern, indem sie Richtlinien zur Genderkompetenz entwickeln, an deren Entstehung auch Lernende teilnehmen können. Ziel ist es, Respekt und Offenheit zu vermitteln, um Neugierde und Verständnis für Geschlechtervielfalt zu fördern. Dies unterstützt die Lernenden, insbesondere solche, die ihre Geschlechtsidentität erkunden. Eine dauerhafte Praxis sollte darauf abzielen, die Stärken und Bemühungen aller Schülerinnen und Schüler zu würdigen (Woolley & Airton, 2020). Überdies könnte sich der Umgang mit Emotionen, insbesondere Angst, für mathematische Interventionen für Jungen als wichtig erweisen. Die Identifizierung und Entwicklung von Unterrichtsstrategien und Interventionsplänen zur Verbesserung der mit dem Lernprozess verbundenen affektiv-emotionalen Erfahrungen sollte auf der Bildungs- und Forschungsagenda stehen (Rodriguez, Regueiro, Pineiro, Estevez & Valle, 2020). Durch den Einsatz geschlechtsneutraler Beispiele im Unterricht können nicht nur Geschlechterstereotype vermieden werden, sondern auch die Motivation aller Schülerinnen und Schüler gesteigert werden. Darüber hinaus kann die gezielte Förderung von Teamarbeit und die Entwicklung kooperativer Fähigkeiten den Mathematikunterricht für Lernende ansprechender und wirkungsvoller gestalten (Keller, 2007). Dies trägt dazu bei, ein motivierendes Lernumfeld zu schaffen, das den individuellen Bedürfnissen und Interessen der Lernenden gerecht wird.

Genderkompetenz im Mathematikunterricht bedeutet auch, eine Sensibilität für geschlechtsspezifische Unterschiede im Mathematiklernen zu entwickeln und diese zu adressieren. Ferner gilt es „geschlechtsspezifische Unterschiede in mathematischer Leistungsfähigkeit und Interesse zu minimieren“ (Hyde, Fennema & Lamon, 1990). Um dieses Ziel zu erreichen, sollten Lehrkräfte genderbezogene Stereotypen in der Mathematik aufbrechen und den Schülerinnen und Schülern vermitteln, dass Geschlecht kein Indikator für mathematisches Talent ist (Tandrayen-Ragoobur & Gokulsing, 2022). Zudem sollten Lehrkräfte sicherstellen, dass Mädchen und Jungen gleichermaßen motiviert sind, Mathematik zu lernen, indem sie „die Relevanz von Mathematik für verschiedene Berufsfelder und Lebensbereiche betonen“ (Else-Quest, Hyde & Linn, 2010, S. 1329). Dadurch können Mädchen ermutigt werden ihre Fähigkeiten in Mathematik zu nutzen, um Karrieren in MINT-Feldern zu verfolgen, die traditionell von Männern dominiert werden. Ein weiteres wichtiges Ziel eines genderkompetenten Mathematikunterrichts ist es, eine inklusive Lernumgebung zu schaffen, die allen Schülerinnen und Schülern offensteht, unabhängig von ihrem Geschlecht, ihrer Rasse, ihrer ethnischen Herkunft oder ihrer sexuellen Orientierung (Tandrayen-Ragoobur & Gokulsing, 2022). Lehrpersonen sollten sicherstellen, dass Lernende aktiv am Unterrichtsgeschehen teilhaben können, indem sie die Gelegenheit haben, ihre Gedanken und Ansichten zu äußern. Wenn Mädchen in Mathematik beispielsweise nur als Protagonistinnen von Aufgaben dargestellt werden, die mit „typisch weiblichen“ Interessen wie Mode oder Shopping zu tun haben, kann dies dazu beitragen, dass Mädchen Mathematik als weniger relevant für ihre Interessen und Karriereziele wahrnehmen (Else-Quest, Hyde & Linn, 2010). Eine Möglichkeit dafür wäre es, biographisches Lernen zu integrieren, indem individuelle Erinnerungen und Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler miteinbezogen werden. Zudem wird die Selbstgestaltung des Lernens gefördert und es erweitert den Blick über traditionelle Grenzen. Im Mathematikunterricht betont es die Vielfalt von Lösungswegen, fördert die Genderkompetenz und ermöglicht die Reflexion persönlicher Lebensvorstellungen und Entscheidungsstrategien (Onnen, 2015).

Zusammenfassend zeigt die Literatur, dass die Umsetzung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts eine Vielzahl von Faktoren umfasst, darunter die Verwendung geschlechtsneutraler Sprachformen, die Vermeidung von geschlechtsbezogenen Stereotypen in Lehrmaterialien und Beispielen, die Förderung von Schülerinnen und Schülern durch Mentoring-Programme und gezielte Maßnahmen sowie die Schaffung einer inklusiven Lernumgebung für alle Schülerinnen und Schüler.

2.2 Hürden

Noch immer ist unklar, wieso weibliche Lernende vom vorherrschenden kalkülorientierten Unterricht nicht profitieren können, obwohl ihnen diese Unterrichtsform tendenziell besser liegt (Budde, 2009). Des Weiteren bedarf es weiterer Untersuchungen, ob ein genderkompetenter Mathematikunterricht dazu beitragen kann, das Selbstkonzept von Mädchen zu stärken und ihr Interesse an diesem Fach zu steigern (Budde, 2009). Interventionsansätze könnten helfen, Geschlechterstereotype in Mathematik bei Jugendlichen und Erwachsenen zu entkräften. Es braucht jedoch mehr Forschung, um die Wirksamkeit dieser Ansätze bei Kindern unterschiedlichen Alters zu untersuchen. Darüber hinaus sind nur wenige Informationen darüber bekannt, ob positive kurzfristige Effekte, die aus Interventionen resultieren, über die Zeit anhalten. Es ist wahrscheinlich, dass solche umfassend und langfristig sein müssen, um positive Auswirkungen auf die mathematischen Einstellungen und Leistungen von Mädchen haben zu können. Diese sollten früh ansetzen, nämlich schon bevor Mathematik-Geschlechterstereotypen ihre mathematischen Leistungen und Interessen untergraben (Levine & Pantoja, 2021). In Bezug auf das Potenzial von Emotionen, die mit dem Klassenzimmer verbunden sind, lohnt es sich eine längsschnittliche, experimentelle und interventionelle Forschung vorzuschlagen, um die angenommenen kausalen Beziehungen zwischen diskreten positiven und negativen Emotionen und der Leistung zu untersuchen. Lehrpersonen sollten zudem die Auswirkungen von unterschiedlichen Lernmethoden auf die Gefühle ihrer Schülerinnen und Schüler berücksichtigen. Denn wenn Lehrpersonen verstehen, welche Lernmethoden zu positiven oder negativen Emotionen führen können, können sie das Lernumfeld für ihre Schülerinnen und Schüler verbessern und negative Gefühle reduzieren. Es wäre daher sinnvoll, diese Themen in der Lehramtsausbildung zu behandeln (Rodriguez, Regueiro, Pineiro, Estevez & Valle, 2020).

Eine weitere Hürde ist es, herauszufinden, welchen Einfluss die Wahrnehmung der Jungen und Mädchen durch die Lehrpersonen sowie die Interaktionen im Unterricht haben. Außerdem fehlen aktuell Konzepte für eine effektive Aufklärungsarbeit für Eltern gegenüber mathematischer Stereotypen (Budde, 2009). Zukünftig wird eine weitere Schwierigkeit in der Schule die Berücksichtigung der Heterogenität der Lernenden sein. Denn die Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich nicht nur durch Geschlecht, sondern auch durch unterschiedliche soziale Kategorien. Zu diesen zählen Milieu, Migration, Gesundheit, Geschlecht, Alter und weitere Bereiche, sodass die komplexen und individuellen Lebens- und Lernlagen der Lernenden deutlich werden. Elbe und Schöning (2019) betonen, dass die Lehrpersonenausbildung eine weitere Hürde bei der Umsetzung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts darstellt. Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass die Genderkompetenz von Lehrenden im Studium nicht ausreichend berücksichtigt wird. Um einen genderkompetenten Unterricht umsetzen zu können, sei es wichtig, dass angehende Lehrpersonen für das Thema sensibilisiert werden und Strategien erlernen, um geschlechtersensible Methoden und Materialien im Unterricht zu verwenden. Es liegt somit in der Verantwortung der Institutionen für Lehramtsausbildung sicherzustellen, dass zukünftige Lehrkräfte ausreichend für eine genderkompetente Praxis im Mathematikunterricht ausgebildet werden (Elbe & Schöning, 2019). Ein weiterer Aspekt, den es bei der Umsetzung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts zu bedenken gilt, ist die Auswahl und Gestaltung von Lehrmaterialien. Gemäß Koehler, Cimpian und Grigorenko (2021) ist eine Herausforderung im genderkompetenten Mathematikunterricht, dass dieser gegen gesellschaftliche Stereotype und Vorurteile ankämpfen muss. Insbesondere Mädchen und Frauen werden oft als weniger fähig in Mathematik und Wissenschaft stereotypisiert, was dazu führen kann, dass sie sich von diesen Themen abwenden oder sich weniger selbstbewusst fühlen, wenn es darum geht, mathematische Probleme zu lösen (Koehler, Cimpian & Grigorenko, 2021).

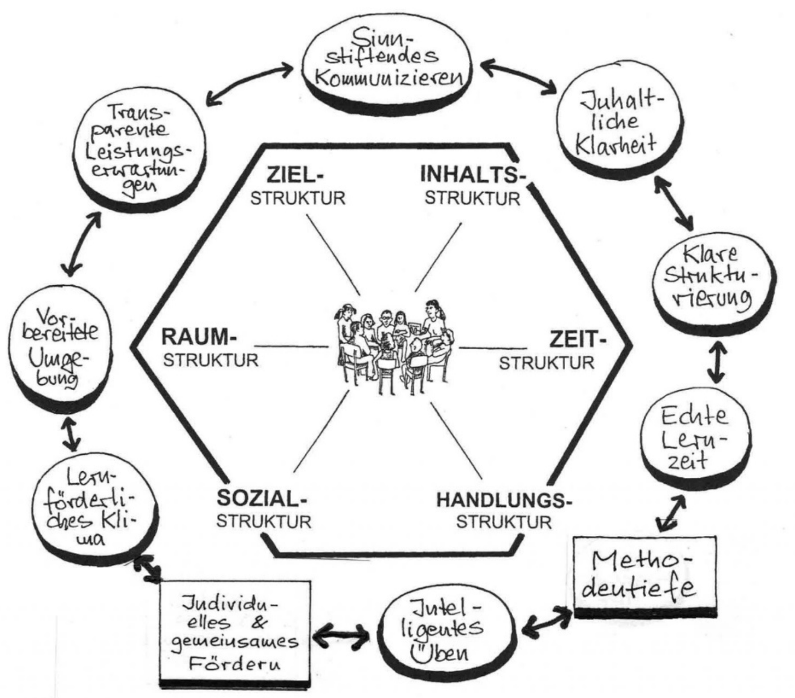
3 Komponenten eines genderkompetenten Mathematikunterrichts

Mathematik gendersensibel zu unterrichten, bedeutet nicht, sich auf Geschlechterunterschiede bei Interessen, Geschicklichkeiten oder Lebensbereichen zu beziehen. Vielmehr sollte man sich als Mathematiklehrperson die Problematiken in der (Re-)Produktion bezüglich der Geschlechterunterschiede vor Augen führen. Diese sollten so gut wie möglich abgewandelt werden, um infolgedessen Lehr- und Lernmöglichkeiten gestalten zu können, die fernab von altbekannten Stereotypisierungen in Bezug auf das Geschlecht bewältigbar sind. Auf jeden Fall sollte das Bestreben eine Auflösung der vorherrschenden Geschlechterrollen sein (Mischau & Eilerts, 2018). Anzumerken ist zudem, dass es nicht darum gehen sollte, neue Verordnungen oder Konzepte zu konzipieren. Stattdessen sollte man mit Vorhandenem, wie zum Beispiel passenden Betrachtungsweisen von allgemeinen Ansätzen der Mathematikdidaktik, arbeiten und diese, wenn nötig, abändern und Entsprechendes hervorheben (Mischau & Eilerts, 2018; Onnen, 2015).

3.1 Diskurse um einen gendersensiblen Mathematikunterricht

Merkmale guten Unterrichts nach Hilbert Meyer (2010) und Andreas Helmke (2009)

Meyer (2009) versteht unter einem guten Unterricht einen demokratischen Umgang zwischen den Beteiligten. Darüber hinaus geht es um eine Orientierung, die Sinn vermittelt und dazu beiträgt, dass die Schülerinnen und Schüler nachhaltige Kompetenzen entwickeln können. Der Unterricht soll so konzipiert sein, dass Schülerinnen und Schüler angesichts ihres Leistungsniveaus gefördert und gefordert werden können (Meyer, 2010). Damit diese Forderung adäquat in der Praxis umgesetzt werden kann, hat Hilbert Meyer zehn Merkmale guten Unterrichts entwickelt, die nachfolgend in einem Sechseck visualisiert sind:



F

Abb. 2: Merkmale guten Unterrichts (Meyer, 2010, S. 228)

Ein Merkmal, das repräsentativ für die Genderthematik herangezogen werden kann, ist jenes des lernförderlichen Klimas. Nach Meyer herrscht im Unterricht eine derartige Atmosphäre vor, wenn ein wertschätzender und respektvoller Umgang zwischen den Beteiligten, also der Lehrperson und den Schülerinnen und Schülern, gegeben ist. Dieses lernförderliche Klima liegt dann vor, wenn die Lehrkraft alle Lernenden gleichermaßen behandelt und niemanden bevorzugt. Dies liegt nicht nur in der Hand der erwachsenen Person, ebenso müssen Schülerinnen und Schüler der Lehrperson und im Miteinander eine gewisse respektvolle Haltung an den Tag legen. Nur so gelingt eine angenehme Atmosphäre und damit einhergehend ein lernförderliches Unterrichtsklima. Wurde diese Basis im Unterrichtsgeschehen etabliert, so können sich in positiver Weise die Fähigkeiten und Interessen der Heranwachsenden herauskristallisieren. Infolgedessen kann dies wiederum zu besseren Leistungen führen (Meyer, 2010).

Andreas Helmke bestärkt Hilbert Meyers Forderung eines lernförderlichen Klimas. Er fügt der Beschreibung von Meyer (2010) hinzu, dass es eine Lernumgebung ist, wo die Lernenden eine Entlastung, Unterstützung oder andere günstige Momente für ihre Leistungen erfahren (Helmke, 2009). Dass dieser Aspekt des lernförderlichen Klimas exemplarisch herausgenommen wurde, hat den Grund, dass ein solches nur dann gegeben sein kann, wenn sich alle Beteiligten im Klassenraum respektvoll und wertschätzend integrieren. Helmke spricht in seiner Abhandlung, was guten Unterricht ausmacht, unter anderem die Orientierung der Kinder an. Er führt hierbei aus, dass alle Individuen im Klassenraum gleichberechtigt, ernst und wertschätzend behandelt werden sollten. Eine solche Auffassung von gutem Unterricht impliziert, dass die Rolle der Lehrkraft nicht nur auf die Wissensvermittlung beschränkt ist, sondern auch eine Beziehungsebene einschließt. Dadurch wird das Arbeitsumfeld der Lehrkraft erweitert. Bei einem schülerinnen- und schülerorientierten Unterricht ist es für Lehrpersonen unumgänglich, die Interessen der Heranwachsenden zu kennen und ein kontinuierliches Feedback zur Unterrichtsgestaltung von den Lernenden einzuholen. Schlussendlich sollten alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen miteingebunden werden, was sich infolgedessen positiv auf die Leistungen und die Motivation im Lerngeschehen auswirken kann (Helmke, 2009).

Ein weiterer Aspekt, der in der gendersensiblen Didaktik relevant ist und von Helmke thematisiert wird, ist der Umgang mit Heterogenität. Laut ihm sollte ein Unterricht, der auf den Umgang mit Heterogenität abzielt, alle Heranwachsenden gleichberechtigt fördern beziehungsweise fordern. Auf Grundlage dessen sollte sich der Unterricht an die im Klassenraum vorherrschende Heterogenität anpassen. Genauer genommen bedeutet dies, dass Lehrpersonen die Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler wahrnehmen müssen, um Beachtung gegenüber den Geschlechtern, des Alters oder exemplarisch dem kulturellen Hintergrund schenken zu können. (Helmke, 2009). Schlussendlich erkennt man sowohl bei Meyer, als auch bei Helmke, dass sie einen grundsätzlichen gendersensiblen Gedankengang bei der Konzipierung ihrer Merkmale guten Unterrichts berücksichtigen.

Sinnstiftender Mathematikunterricht nach Jahnke-Klein (2001)

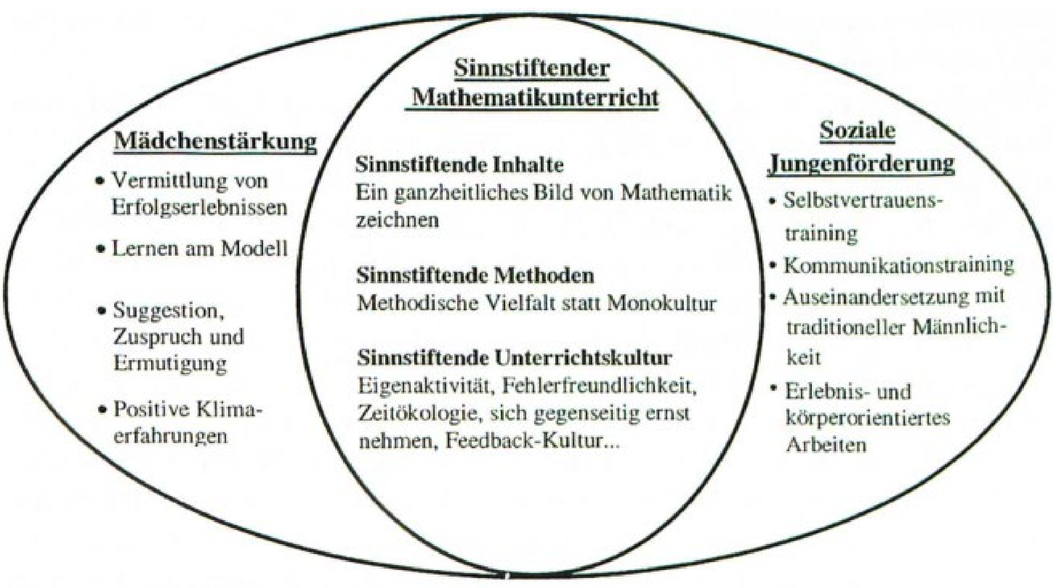


Abb. 3: Sinnstiftender Mathematikunterricht (Jahnke-Klein, 2001, S. 251)

Motzer (2019) kam zum Schluss, dass Schülerinnen und Schüler eine unterschiedliche Sinnhaftigkeit in der Mathematik sehen. Daher ist es für Lehrpersonen essenziell, sich für eine Vielfalt an Denkstilen und Zugängen zu öffnen. Dadurch wird ein Raum an vielschichtigen und sinnstiftenden Perspektiven geboten, um sich mit Hilfe von unterschiedlichen Wegen der Mathematik anzunähern (Motzer, 2019). Diese Sinnhaftigkeit stellte Jahnke-Klein (2001) in ihrem Konzept „Sinnstiftender Mathematikunterricht" in den Fokus. Dieses geht von der Annahme aus, dass das Verstehen von Inhalten mit dem Erleben von Sinnen verknüpft ist. Dahingehend wurden Neugestaltungen am Inhalts-, Methoden- und dem Unterrichtskulturniveau initiiert. Eine Änderung in diesem Konzept sieht vor, dass Lehrpersonen ein ganzheitliches Bild der Mathematik übermitteln sollen. Schülerinnen und Schüler sollen die Mathematik als vielfältig wahrnehmen und eine Verbindung mit der Gesellschaft und der eigenen Kultur herstellen können. Eine weitere Änderung, die der sinnstiftende Mathematikunterricht vorsieht, ist eine Unterrichtsmethodenvielfalt und eine sinnstiftende Unterrichtskultur. Unter letzterer versteht man ein positives Lernklima, in dem man Fehlern auf positiver Ebene begegnet und Raum für Emotionen bleibt. Forciert man nun als Lehrperson einen solchen, so können die Selbstwirksamkeitserwartungen und das Sozialverhalten der Heranwachsenden davon profitieren (Jahnke-Klein, 2001).

3.2 Rolle der Lehrperson

Wie schon in dieser Arbeit erwähnt wurde, hat das Schulsystem einen großen Einfluss auf die Entwicklung der Heranwachsenden. Aber nicht nur die Institution Schule als Ganzes, sondern auch die Lehrkräfte selbst. Lehrpersonen sind meist Vorbilder für Schülerinnen und Schüler, deshalb ist es umso wichtiger im Hinblick auf die Geschlechtsidentifizierung eine reflektierte Haltung und ein angemessenes Verhalten an den Tag zu legen (Manz, 2015; Alshut, 2012).

Im Sinne jeder Lehrperson sollte es daher sein, eine dementsprechende Position gegenüber gendersensiblen Themen einzunehmen. Auch wenn Schülerinnen und Schüler sich nicht mit jeder Lehrerpersönlichkeit identifizieren können, so muss man in der pädagogischen Tätigkeit dennoch eine gewisse Haltung gegenüber bestimmten Thematiken einnehmen. Denn positioniert man sich als Lehrperson in gewissen Maßen, so kann diese Position auch einen Wert an die Heranwachsenden vermitteln. Daraus lässt sich ableiten, dass als Lehrperson eine wertschätzende und adäquate Haltung zum Gegenstand einzunehmen ist. Denn erwachsene Personen ermöglichen den Heranwachsenden erst die Liberalität der Verwirklichung der einzelnen Geschlechteridentitäten, wenn sie ihnen unbewusst durch ihre Position vermitteln, dass geschlechtliche Diversität angebracht und gleichberechtigt ist (Manz, 2015; Mörth, 2006). Sehen Lehrpersonen anfangs meist die Umsetzung eines genderkompetenten Mathematikunterrichts kritisch, so kommen sie meist während der Ausführung zu dem Entschluss, dass es einen positiven Effekt auf das Unterrichtsklima haben kann (Jungwirth, 2014).

3.3 Interaktionen

Miteinhergehend mit einer gendersensiblen Interaktionskultur sind Faktoren wichtig, die auf eine Bewältigung der bis dato noch vorherrschenden Geschlechterstereotypen oder geschlechterstereotypisierenden Interaktionen während des Unterrichts abzielen (Mischau & Eilerts, 2018). Ein ebenso wichtiger Kerngedanke im Hinblick auf einen genderkompetenten Mathematikunterricht, ist der Interaktion zuzuschreiben. Um diese Interaktion während des Unterrichtsgeschehens ermöglichen zu können, bedarf es einer zuvor verfassten Unterrichtsplanung. Wichtig ist in diesem Prozess, dass Lehrpersonen Mädchen und Jungen gleichermaßen Möglichkeiten während des Unterrichts einräumen, ihre Kompetenzen, ihre Emanzipation und ihre Teilhabe am sozialen Leben erfahrbar zu machen. Durch dieses Vorgehen wird es den Heranwachsenden ermöglicht, Interessen zu entwickeln (Jungwirth, 2014; Woolley & Airton, 2020). Offenbart man den Schülerinnen und Schülern die Option sich mit Fragen am Unterrichtsgeschehen zu beteiligen, so würde man meinen, dass wiederum nur die Jungen hier explizit hervorstechen. Jungwirth (2014) kam jedoch zum Entschluss, dass auch Mädchen die Chance nutzen, in die Interaktion während des Unterrichts einzutauchen. Deshalb kann gesagt werden, dass eine fragend-entwickelnde Erarbeitung sinnstiftend für einen gendersensiblen Mathematikunterricht sein kann.

Verdichtete Interaktionen

Unter verdichteten Interaktionen versteht man ein Unterrichtsgeschehen, das den Lernenden einen größeren Rahmen für ausführlichere und elementarere Abhandlungen bietet (Krummheuer & Fetzer, 2005). Lernende sollen stärker in das Unterrichtsgeschehen miteingebunden werden. Schülerinnen und Schüler sollen dahingehend gleichermaßen Erlebnisse in Bezug auf Kompetenz, Autonomie und sozialer Beteiligung erfahren. Durch diese Vorgehensweise kann das Interesse bei den Heranwachsenden für die Thematik bestärkt werden (Jungwirth, 2014).

3.4 Sprache

Eine ausgebildete Sprache ist generell für die Bildung und infolgedessen für die mathematische Bildung von immenser Bedeutung (Specht & Tokarski, 2019). Auch wird davon ausgegangen, dass Sprache die Wirklichkeit reflektiert und konstruiert. Somit leistet die Sprache einen Beitrag im Umdenken im Geschlechterkontext (Mörth, 2006). Deshalb sollte es im Interesse jeder Lehrperson sein, der eigenen Sprache Beachtung zu schenken (Woolley & Airton, 2020).

Dafür muss jedoch vorerst eine Definition gegeben werden. Wenn von geschlechtersensibler Sprache die Rede ist, versteht man darunter, dass man durch seine verbalen Äußerungen im alltäglichen Leben einen Anteil zu mehr Geschlechtergleichberechtigung leistet. Denn wie in den vorherigen Abschnitten schon aufgezeigt wurde, ist Geschlecht heutzutage noch immer eine bedeutende Klassifizierung, die Rangordnungen herstellt. Diese Hierarchiebildung kann die Gesellschaft gemeinsam durch eine gendersensible Sprachweise aufbrechen (Universität zu Köln, 2021; Knoll & Szalai, 2012). Somit lässt sich daraus ableiten, dass eine bedachte Sprachweise für einen gendersensiblen Mathematikunterricht unumgänglich ist. Die Universität Köln definiert demnach eine geschlechtersensible Sprachweise auch, indem alle Geschlechter und Identitäten gleichermaßen spürbar und respektvoll angesprochen werden (Universität zu Köln, 2022).

Einen Leitfaden mit dem Titel „Geschlechtergerechte Sprache“ entwickelte die Universität Köln im Jahre 2009. Durch mehrere Überarbeitungen entstand im Jahr 2021 die 7. überarbeitete und erweiterte Auflage mit dem Titel „ÜberzeuGENDERe Sprache“. Dieser Leitfaden zeigt, wie die Umsetzung einer gendersensiblen Sprache in der Praxis mit Einfluss der rechtlichen Lage, Rechtschreibung und Verständlichkeit möglich wird. Der Leitfaden nennt für die Umsetzung einer gendersensiblen Sprache drei Kriterien. Diese lauten „Sichtbarmachen von Männern und Frauen“, „Ansprache aller“ und „Neutralisieren“ und bietet demnach ein konstruktives Nachschlagewerk zur Rechtschreibung oder zum Umgang mit einer geschlechtsneutralen Sprache (Universität zu Köln, 2021).

3.5 Methoden

Schülerinnen und Schüler benötigen unterschiedliche methodische Zugänge. Dazu zählen auch vielfältige Lernmethoden, Unterrichtsinhalte, Materialien, die alle darauf abzielen, das Interesse der Heranwachsenden bei der Bearbeitung des Stoffgebietes miteinfließen zu lassen. Ebenso sollen durch diese Art des Unterrichts ihre Potenziale und Kompetenzen zum Vorschein kommen und dem gendersensiblen Lernen entsprochen werden (Jenderek, 2015).

Grundlegend sollte man wissen, dass eine Vielfalt an Lernformen für einen gendersensiblen Mathematikunterricht gegeben sein sollte, denn jede Schülerin und jeder Schüler lernt anders (Onnen, 2015). Deshalb kann ein gendersensibler Mathematikunterricht aus Gruppen, Einzel- oder Partnerarbeiten bestehen. Aber auch der altbekannte Lehrer*innenvortrag und das Unterrichtsgespräch sind Lernformen, mit denen wiederum einige Heranwachsende den zu bearbeitenden Lerninhalten besser Folge leisten können und deshalb auch in einem genderausgelegten Mathematikunterricht durchaus willkommen sind (Jungwirth, 2014). Dieser Aspekt der Methodenvielfalt wird ebenso durch Hilbert Meyers zehn Merkmale guten Unterrichts bestärkt. Eine Methodenvielfalt ist demnach gegeben, wenn Lehrkräfte eine adäquate Nutzung der ihr zugänglichen Unterrichtsmittel aufweisen, verschiedenste Unterrichtshandlungen einbinden, der Unterricht flexibel konzipiert wird und ein Gleichgewicht zwischen den Grundformen des Unterrichts besteht. Meyer (2010) fügt der bestehenden Methodenvielfalt noch hinzu, dass die Schülerinnen und Schüler dadurch ebenso bessere soziale und kognitive Leistungen an den Tag legen können. Nach ihm kann deshalb die Methodenvielfalt nie zu umfangreich sein. Der Ansatz eines sinnstiftenden Mathematikunterrichts nach Jahnke-Klein (2001) sieht ebenso eine Methodenvielfalt als fruchtbringend an. Bei angewandter Methodenvielfalt im Mathematikunterricht sind die Heranwachsenden meist stärker selbst organisiert in ihrem Lern- und Erarbeitungsprozess. Ebenso wird den Arbeits- und Kommunikationstypen der Schülerinnen und Schüler mehr Beachtung geschenkt und infolgedessen kann dies mehr Motivation und bessere Mathematikleistungen begünstigen (Jahnke-Klein, 2001). Um die Mathematikangst der Schülerinnen und Schüler zu verringern, wäre eine Möglichkeit sorgfältige Heftführung zu fördern. Dies forciert Kreativität im Mathematikunterricht und kann besonders weibliche Lernende ermutigen (Matzner & Wyrobnik, 2010; Genkova & Ringeisen, 2016).

Aber man benötigt nicht nur Lehr- und Lernformen, die eine Methodenvielfalt vorsehen, um Genderkompetenz im Unterrichtsgeschehen erreichen zu können. Ebenso müssen Lernziele darauf abgestimmt werden. Ein Vorschlag für die gendersensible Konstruktion von Lernzielen wäre eine Verknüpfung von hermeneutischen, ideologiekritischen und realutopischen Ansätzen. Unter hermeneutischen Lernzielen versteht man, dass Schülerinnen und Schüler bedingt durch ihre Erfahrungen und Sozialisierung differierende Blickwinkel und Herangehensweisen in Bezug auf bestimmte Thematiken haben. Ideologiekritische Lernziele sehen vor, dass sich die Heranwachsenden konkret mit Stereotypen auseinandersetzen und diese aufzubrechen versuchen. Zuletzt versuchen realutopische Lernziele durch den Blick und das Arbeiten an der Zukunft soziale Ideen zu fördern (Onnen, 2015).

3.6 Themen und Aufgaben

Damit ein gendersensibler Mathematikunterricht umsetzbar ist, ist die Auswahl der Themen und Aufgaben ausschlaggebend. Diese sollen, wie in vorherigen Abschnitten schon erwähnt wurde, die Interessen der Schülerinnen und Schüler beinhalten, aber auch fächerübergreifend ausgelegt sein. Die mathematischen Aufgaben sollen nicht nur in naturwissenschaftlichen Sachkontexten eingebettet sein, vielmehr sollen für einen interessanten und genderneutralen Mathematikunterricht die Aufgaben umfassende Bereiche ansprechen, wie zum Beispiel medizinische Aspekte. Deshalb sollten Zugänge im Mittelpunkt stehen, die es ermöglichen unterschiedliche fachliche Aspekte anzusprechen, um infolgedessen verschiedene Denk- und Problemlösestile zu begünstigen. Somit wird eine Vielfalt im Unterrichtsgeschehen ermöglicht und ein ganzheitliches Mathematikbild mit Bezug zur Realität den Schülerinnen und Schülern vermittelt (Jungwirth, 2014).

Aufgabe mit Realitätsbezug

Für einen Report in der Schülerzeitung zum Thema „Rauchen in der Schule" wurde eine Umfrage durchgeführt. Dazu wurden 90 über 16-jährige Schülerinnen und Schüler aus Wien zufällig ausgewählt und über ihre Rauchgewohnheiten befragt. 30 Personen gaben dabei an, mindestens eine Zigarette pro Tag zu rauchen. In der Schülerzeitung ist zu lesen: Jeder dritte Wiener Schüler/jede dritte Wiener Schülerin über 16 raucht täglich.

Aufgabenstellung:

Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall an, um die Verlässlichkeit dieser Aussage abzuschätzen.

Abb. 4: Genderkompetente Aufgabe (Jungwirth, 2014)

Die mathematischen Aktivitäten der Lernenden in dieser Aufgabe umfassen eine präzise Analyse des bereitgestellten Textes und der angegebenen Daten, um das benötigte Intervall zu ermitteln. Darüber hinaus erfordert es angemessene Operationen und eine kritische Reflexion der zitierten Aussage im Zusammenhang mit dem Intervall. Möglicherweise ist auch eine psychologische Erklärung der Aussage in der Schülerzeitung erforderlich, die aufgrund der zusätzlichen mathematischen Informationen nicht länger aufrechterhalten werden kann (Jungwirth, 2014). Gendersensible Didaktik, wie von Helmke betont, sollte sich auf den Umgang mit Heterogenität im Unterricht konzentrieren. Dies bedeutet, dass Lehrpersonen die Bedürfnisse aller Schülerinnen und Schüler berücksichtigen müssen, unabhängig von Geschlecht, Alter oder kulturellem Hintergrund. Ein angepasster Schwierigkeitsgrad ermöglicht es, dass sich keine Schülerin oder kein Schüler unter- oder überfordert fühlt. Jedes Kind wird so in seinem eigenen Tempo gefördert und gefordert, was selbstständiges Lernen unterstützt (Helmke, 2009).

4. Fazit und Ausblick

Genderkompetenter Mathematikunterricht bedarf keiner Neukonstituierung von Unterricht. Vielmehr sollten Konzepte aufgegriffen und mit Hilfe einer geschlechtssensiblen Sichtweise neu aufgefasst werden. Viele Bereiche des Unterrichts (Interaktionen, Sprache, Methodik, Themen) können geschlechtssensibel vorbereitet werden. Dafür wurden zwei Erlässe des Bildungsministeriums formuliert (Erziehung zur Gleichstellung von Frauen und Männern, 1995 & Reflexive Geschlechterpädagogik und Gleichstellung, 2018). Diese sind ein ideales Grundgerüst, um in die Kernidee des genderkompetenten Unterrichts zu vertiefen, jedoch braucht es weitere synthetisierende Ideen aus Theorie und Praxis, um das Potential der Mädchen in Österreich in der Mathematik und für den MINT-Bereich umfassend fördern und fordern zu können.

Literatur

Alshut, M. (2012): Gender im Mainstream? In: Kosmann, M.; Nowacki, K.; Toprak, A. (Hrsg.): *Geschlechtergerechte Arbeit mit Kindern und Jugendlichen* (Bd. 8). Freiburg: Centaurus Verlag.

Amon, H.; Bartosch, I.; Lembens, A.; Wenzl, I. (2012): *Gender-Diversity-Kompetenz im naturwissenschaftlichen Unterricht - Fachdidaktische Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer*. Klagenfurt: Institut für Unterrichts- und Schulentwicklung.

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex, and setting.* Buckingham: Open University.

Budde, J. (2009): *Mathematikunterricht und Geschlecht. Empirische Ergebnisse und pädagogische Ansätze*. Bildungsforschung Band 30.

Budde, J.; Venth, A. (2010): *Genderkompetenz für lebenslanges Lernen*. Bielefeld: FSC.

Durksen, T., Way, J., Bobis, J. & Anderson, J. (2018): The gender–math stereotype is everywhere: A comparative analysis of countries with varying levels of gender equality. *Frontiers in Psychology, 8*.

Else-Quest, N.; Hyde, J.; Linn, M. (2010): Cross-national patterns of gender differences in mathematics: a meta-analysis. In: *Psychological bulletin 136*(1), 103-127.

Helmke, A. (2009): *Unterrichtqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze-Velber: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Hermann, J. (2020): Warum Mädchen schlechter rechnen und Jungen schlechter lesen – Wenn Geschlechtsstereotype zur Bedrohung für das eigene Leistungsvermögen in der Schule werden. In: Glock, S.; Kleen, H. (Hrsg.): *Stereotype in der Schule,* 33-70. Wuppertal: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Hill, K., Mammes, I., Roesken-Winter, B., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019): Gender-sensitive mathematics education: A review of theory and practice. *Journal of Research in Mathematics Education, 50*(3), 258-285.

Hyde, J.; Fennema, E.; Lamon, S. (1990): Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. In: *Psychological Bulletin 107*(2), 139-155.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (2020): *International Results in Mathematics and Science*. Abgerufen am 12.10.2023 von https://www.iea.nl/sites/default/files/2020-12/TIMSS%202019-International-Results-in-Mathematics-and-Science.pdf

Jahnke-Klein, S. (2001): *Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen*. Baltmannsweiler: Schneider-Verl. Hohengehren.

Jahnke-Klein, S. (2014): Benötigen wir eine geschlechtsspezifische Pädagogik in den MINT-Fächern? Ein Überblick über die Debatte und den Forschungsstand. In: Theurer, C.; Siedenbiedel, C.; Budde. J. (Hrsg.): *Lernen und Geschlecht*. Immenhausen bei Kassel: Prolog Verlag. S. 46-67.

Jenderek, L. (2015): Der Einsatz von geschlechterunterscheidenden Materialien in der Schule. In: Wedl, J.; Bartsch, A. (Hrsg.): *Teaching Gender?: Zum reflektierten Umgang mit Geschlecht im Schulunterricht und in der Lehramtsausbildung.* Bielefeld: Transcript-Verlag. S. 47-66.

Jungwirth, H. (2014): *Genderkompetenz im Mathematikunterricht - Fachdidaktische Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer (2. Aufl..).* Klagenfurt: Institut für Unterrichts- und Schulentwicklung.

Keller, J. (2007). Gender and math: Theoretical and empirical approaches. In S. Ceci, & W. Williams, Why aren't more women in science?: Top researchers debate the evidence. *American Psychological*, 37-47.

Kelz, J. (2017): *Mathematik und Geschlechtsdisparitäten - Eine Analyse in der Schuleingangsphase*. Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz.

Kelz, J. (2020): *Analyse der Beziehung Selbstkonzept und mathematischer Leistung in der Primarstufe. Innerhalb des Projektes „Längsschnittanalyse mathematischer Geschlechtsdisparitäten bei 6- bis 10- jährigen Grundschulkindern"*. Dissertation, Karl-Franzens-Universität Graz.

Koehler, C.; Cimpian, A.; Grigorenko, E. (2021): Gender and mathematics. In: Ross, B. (Hrsg.): *The psychology of learning mathematics: A psychoanalytic perspective*. Routledge.

Krummheuer, G.; Fetzer, M. (2005): *Der Alltag im Mathematikunterricht: beobachten - verstehen - gestalten* (1. Aufl.). München: Elsevier.

Levine, S.; Pantoja, N. (2021): Development of children's math attitudes: Gender differences, key socializers, and intervention approaches. In: *Developmental Review 62*.

Manz, K. (2015): Geschlechterreflektierende Haltung in der Schule. In: Wedl, J.; Bartsch, A. (Hrsg.): *Teaching Gender?: Zum reflektierten Umgang mit Geschlecht im Schulunterricht und in der Lehramtsausbildung*. Bielefeld: Transcript-Verlag. S.103-118.

Matzner, M. & Wyrobnik, I. (Hrsg.). (2010): *Handbuch Mädchen-Pädagogik.* Weinheim: Beltz.

Meyer, H. (2010): *Was ist guter Unterricht?* (7. Aufl.). Berlin: Cornelsen Verlag.

Mischau, A.; Eilerts, K. (2018): Modellieren im Mathematikunterricht gendersensibel gestalten. In: Eilerts, K.;Skutella, K. (Hrsg.): *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5*. Berlin: Springer Fachmedien Wiesbaden. S. 125-142.

Mörth, A. P. (2006): *Handlungsvorschläge für einen nicht-binären Umgang mit Geschlecht*. Graz: Leykam.

Motzer, R. (2019): Gender und Diversität - Que(e)r durch alle Disziplinen. In: Krauss, M.; Krebs, H.; Waldow, S. (Hrsg.): *Augsburger Universitätsreden*, 85-95.

OECD (2022): *PISA-Ergebnisse Mathematik*. Abgerufen am 12.10.2023 von https://www.oecd.org/berlin/statistiken/pisa-ergebnisse-mathematik.htm

Onnen, C. (2015): Studying Gender to Teach Gender – Zur Vermittlung von Gender Kompetenzen. In: Wedl, J.; Bartsch, A. (Hrsg.): *Teaching Gender?: Zum reflektierten Umgang mit Geschlecht im Schulunterricht und in der Lehramtsausbildung*. Bielefeld: Transcript-Verlag. S. 83-102.

Rodriguez, S.; Regueiro, B.; Pineiro, I.; Estevez, I.: Valle, A. (2020): Gender Differences in Mathematics Motivation: Differential Effects on Performance in Primary Education. In: *Frontiers in Psychology 10*, Article 3050.

Specht, B.; Tokarski, L. (2019): Mathematische Modellierung und Sprachkompetenz. In: Butler, M.; Goschler, J. (Hrsg): *Sprachensensibler Fachunterricht - Chancen und Herausforderungen aus interdisziplinärer. Perspektive.* Oldenburg: Springer. S. 163-201.

Tanzberger, R. (2022): Wie könnte ein geschlechtersensibler Mathematikunterricht aussehen? In: IMST (Hrsg.): *Gender Diversität*. Klagenfurt. S. 19-21.

Tandrayen-Ragoobur, V. & Gokulsing, D. (2022). Gender gap in STEM education and career choices: what matters?. *Journal of Applied Research in Higher Education* 14(3), 1021-1040.

Universität zu Köln. (2021): *ÜberzeuGENDERe Sprache - Leitfaden für eine geschlechtersensible Sprache*. www.gb,uni-koeln.de (Zugriff: 20.07.2023)

Woolley, S.; Airton, L. (2020): *Teaching about gender diversity*. Toronto: Canadian Scholars.

Verfasser

Jakob Kelz
Pädagogische Hochschule Steiermark
Institut für Elementar- und Primarpädagogik
Hasnerplatz 12
8010 Graz
jakob.kelz@phst.at

Jennifer Esser
Universität Klagenfurt
jenniferes@edu.aau.at

Sarah Katharina Oberlojer
Universität Klagenfurt
saoberlojer@edu.aau.at

Algorithmen und algorithmisches Denken im Mathematikunterricht

FRANZ PAUER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

In diesem Beitrag werden einige ausgewählte Algorithmen vorgestellt, die im Mathematikunterricht der Primarstufe und der Sekundarstufe erlernt werden: aus dem Unterricht der Primarstufe die Verfahren für das Rechnen mit Zahlen in Zifferndarstellung, aus dem der Sekundarstufe der Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier positiver ganzer Zahlen, Gauß-Elimination zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen und das Bisektionsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen stetiger Funktionen. Es ist wichtig, dass Algorithmen im Schulunterricht nicht nur eingeübt, sondern auch verständlich erklärt werden. Nur so kann den Schülerinnen und Schülern algorithmisches Denken vermittelt werden. Dazu ist es notwendig, die den Algorithmen zu Grunde liegenden Strategien und Ideen zu erläutern. Die österreichischen Lehrpläne sollten deutlicher darauf hinweisen.

1. Einleitung

Algorithmen und algorithmisches Denken sind derzeit in aller Munde. Diese Themen wecken auch Ängste. Darauf ist zum Beispiel Martin Kocher, seit 2021 österreichischer Minister für Arbeit und Wirtschaft, im Oktober 2020 im Vortrag „Angst vor Algorithmen? Verhaltensökonomische Aspekte der Digitalisierung“ am Institut für höhere Studien eingegangen (Kocher 2020). Allerdings gilt auch hier wie bei so vielen anderen Errungenschaften der Menschheit: vor Algorithmen braucht man keine Angst zu haben, aber vielleicht vor manchen Menschen, die sie verwenden.

Im Mathematikunterricht spielen Algorithmen eine große Rolle. Schon in der Volksschule werden jene Algorithmen besprochen, mit denen das Wort Algorithmus eng verbunden ist: das erste Buch über die Verfahren zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung wurde um das Jahr 825 n. Chr. von Muhamad al-Chwarizmi in Choresme im heutigen Usbekistan geschrieben. Aus *al-Chwarizmi* ist im Lauf der Zeit *Algorithmus* geworden.

Diese Algorithmen sind aber nicht die ältesten. Der Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (diesen braucht man zum optimalen Kürzen von Bruchzahlen) wird schon im 3. Jhd. v. Chr. in den Elementen des Euklid beschrieben. Dabei ist auch die zu Grunde liegende Strategie interessant: anstatt zu versuchen, ein Problem direkt zu lösen, ersetze es durch ein einfacheres, das aber dieselbe Lösung hat. Wiederhole das so lange, bis das Problem so einfach geworden ist, dass man die Lösung ohne weitere Überlegungen angeben kann.

Dieselbe Strategie wird auch beim Lösen von Systemen linearer Gleichungen und beim Bisektionsverfahren (zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen stetiger Funktionen) erfolgreich angewandt. Dieses Verfahren liefert auch den Beweis des Zwischenwertsatzes, der besagt, dass die gesuchten Nullstellen unter den gegebenen Voraussetzungen immer existieren. Gibt es eine bessere Art, die Existenz einer Zahl mit gewissen Eigenschaften zu zeigen, als einen Algorithmus anzugeben, der sie berechnet?

Das Verfahren zum Lösen von Systemen linearer Gleichungen zeigt, dass die Einzelschritte von Algorithmen nicht immer genau vorgegeben sein müssen. Es können auch Wahlmöglichkeiten vorhanden sein, diese ermöglichen einen kreativen Umgang mit dem Verfahren.

Dieser Beitrag ist in die folgenden Abschnitte unterteilt:

- Was sind Algorithmen? Was bedeutet algorithmisches Denken?
- Eine Strategie für Algorithmen
- Der Euklidische Algorithmus - der älteste Algorithmus
- Gauß-Elimination - ein Algorithmus mit Wahlmöglichkeiten

Ich danke Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen des Manuskripts und für viele Beiträge zur Verbesserung dieses Textes.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S.101 - 116.

- Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung - die ersten Algorithmen in der Schule
- Das Bisektionsverfahren - ein Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen stetiger Funktionen
- Schlussbemerkungen

2. Was sind Algorithmen? Was bedeutet algorithmisches Denken?

Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine *Klasse von Problemen* gelöst werden kann.

Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, das heißt:

- aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
- diese sind eine Lösung des betrachteten Problems.

Zur Lösung einer Klasse von Problemen kann es mehrere Algorithmen - mit verschiedener Effizienz - geben. Es liegt nahe, jenen mit geringstem Aufwand zu wählen.

Algorithmisches Denken bedeutet: Algorithmen zu verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren und entwickeln.

Algorithmen und algorithmisches Denken sind im Lehrplan der AHS in mehreren Unterrichtsfächern verankert, zum Beispiel findet man

- beim Unterrichtsfach Digitale Grundbildung *Algorithmen nachvollziehen und entwerfen*
- beim Unterrichtsfach Informatik *Algorithmen erklären, entwerfen, implementieren, testen* und
- beim Unterrichtsfach Darstellende Geometrie *algorithmische Denkfähigkeit entwickeln und vertiefen*.

Im Mathematikunterricht lernt man viele Algorithmen kennen, manche bereits in der Volksschule. Sie sollten so unterrichtet werden, dass damit algorithmisches Denken gefördert wird. Algorithmen sollten also nicht nur „eingeübt“ (oder gar „eingedrillt“) werden, sondern auch verständlich erklärt (zugrunde liegende Strategien und Ideen angeben, Korrektheit begründen) werden! Im Lehrplan der AHS wird das im Abschnitt für das Unterrichtsfach Mathematik eher verschwiegen. Das Wort Algorithmus kommt nur bei der Erklärung des Begriffs *formal-operatives Arbeiten* vor, dort werden *Aktivitäten, die auf Algorithmen beruhen* erwähnt.

3. Eine Strategie für Algorithmen

Mathematische Probleme kann man sehr grob in zwei Klassen einteilen:
Einfache Probleme, das sind Probleme, die man durch „Hinschauen“ (ohne zu rechnen) lösen kann.
Nicht-einfache Probleme, das sind die anderen Probleme.

Beispiele für „einfache Probleme“ sind

Berechne ggT(123456, 123456)!
Die Lösung ist 123456.

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $3x+4y=7$!
Die Lösungsmenge ist $\{(1,1)+t\cdot(4,-3)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

Bestimme die Lösungsmenge des Systems linearer Gleichungen
$1\cdot x+0\cdot y=3$
$0\cdot x+1\cdot y=-8$!
Die Lösungsmenge ist $\{(3,-8)\}$.

Eine wichtige Strategie, ein Problem zu lösen ist: ersetze das Problem durch ein anderes, das einfacher ist, aber dieselbe Lösung hat. Wiederhole das zielgerichtet solange, bis ein einfaches Problem erreicht wird.

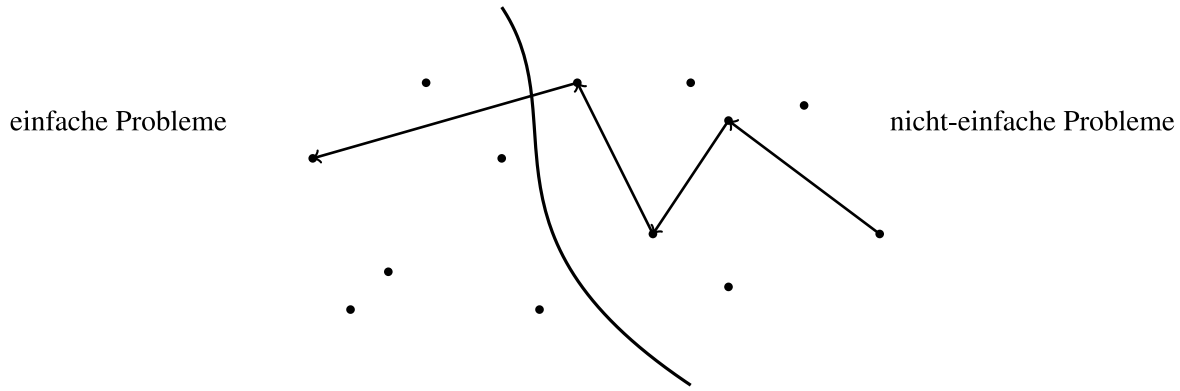


Abbildung 1: Übergang von einem nicht-einfachen zu einem einfachen Problem

4. Der Euklidische Algorithmus - der älteste Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus ist der älteste Algorithmus der Mathematik. Er wird in den Elementen des Euklid um 300 v. Chr. beschrieben, war aber schon früher bekannt.

Man löst damit die folgende Aufgabe:
Gegeben sind positive ganze Zahlen a und b. Bestimme die größte ganze Zahl, die beide teilt. Diese Zahl heißt *größter gemeinsamer Teiler von a und b*, man schreibt dafür kurz $\mathrm{ggT}(a,b)$.

Was macht man mit dem größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen? Warum möchte man ihn berechnen? Seine wichtigste Anwendung ist das optimale Kürzen von Bruchzahlen. Um Bruchzahlen durch möglichst kleine Zähler und Nenner darzustellen, sollte man immer - insbesondere nach jeder Rechenoperation - durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner kürzen. Es ist daher sinnvoll, die Berechnung des ggT erst nach der Einführung der Bruchzahlen und der Besprechung des Kürzens zu unterrichten.

Die Strategie des Euklidischen Algorithmus ist die in Abschnitt 3 besprochene.
Wann ist der ggT zweier Zahlen besonders leicht zu bestimmen? Wenn die zwei Zahlen gleich sind: $\mathrm{ggT}(a,a) = a$.

Die folgende Eigenschaft des ggT ermöglicht es, jede Berechnung eines ggT auf diesen einfachen Fall zurückzuführen:
Für positive ganze Zahlen a und b mit $a \geq b$ ist

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a-b,b)\,.$$

Denn: Ist t ein Teiler von a und von b, dann gibt es positive ganze Zahlen u und v so, dass $t \cdot u = a$ und $t \cdot v = b$ ist. Wegen $t \cdot u \pm t \cdot v = t \cdot (u \pm v)$ ist jeder Teiler von a und b auch ein Teiler von $a+b$ und $a-b$. Ein gemeinsamer Teiler von a und b ist daher auch ein gemeinsamer Teiler von $a-b$ und b. Umgekehrt ist jeder gemeinsame Teiler von $a-b$ und b auch ein gemeinsamer Teiler von $a = (a-b)+b$ und b. Daraus folgt die Behauptung.

Zum Beispiel ist

$$\mathrm{ggT}(713,589) = \mathrm{ggT}(713-589,589) = \mathrm{ggT}(124,589)\,.$$

Im Euklidischen Algorithmus wird solange die größere Zahl durch die Differenz der größeren und der kleineren ersetzt, bis die zwei Zahlen gleich sind.

Also: gehe von (a,b) zu

$$(\max(a,b)-\min(a,b),\min(a,b))$$

über, bis die zwei Zahlen gleich sind.

Jedesmal wird die größere der zwei positiven ganzen Zahlen kleiner, also müssen die zwei Zahlen nach endlich vielen Wiederholungen dieses Schrittes gleich sein.

Dieser Algorithmus kann sehr einfach in einer Programmiersprache dargestellt werden, zum Beispiel:

$$\text{while } a \neq b \text{ do}$$
$$c := \max(a,b),\ d := \min(a,b),\ a := c-d,\ b := d;$$

Beipiel:
Wir berechnen mit diesem Verfahren rasch (durch einige Subtraktionen) den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 713 und 598.

$$\mathrm{ggT}(713,589) = \mathrm{ggT}(589,124) = \mathrm{ggT}(465,124) =$$
$$= \mathrm{ggT}(341,124) = \mathrm{ggT}(217,124) = \mathrm{ggT}(124,93) =$$
$$= \mathrm{ggT}(93,31) = \mathrm{ggT}(62,31) = \mathrm{ggT}(31,31) = 31$$

Wer in der Lage ist, dreistellige Zahlen im Kopf zu subtrahieren, kann diese Berechnung auch im Kopf ausführen, weil man sich immer nur das zuletzt berechnete Zahlenpaar merken muss.

Wenn a viel größer als b ist, wird im Algorithmus b mehrfach von a abgezogen. Das kann man zu einer Division mit Rest von a durch b zusammenfassen und a gleich durch seinen Rest nach Division durch b ersetzen. Zuvor muss noch vereinbart werden, dass $\mathrm{ggT}(a,0) = a$ ist.
Dann hat der Euklidische Algorithmus die folgende Form: ersetze solange die größere Zahl durch ihren Rest nach Division mit Rest durch die kleinere, bis eine der zwei Zahlen 0 ist.

Im Beispiel verkürzt sich dann die Berechnung von $\mathrm{ggT}(713,589)$ zu

$$\mathrm{ggT}(713,589) = ggT(589,124) = \mathrm{ggT}(124,93) = \mathrm{ggT}(93,31) = \mathrm{ggT}(31,0) = 31.$$

Der Euklidische Algorithmus ist nicht nur das älteste, sondern auch das effizienteste Verfahren, den ggT zweier positiver ganzer Zahlen zu berechnen. Er ist in jedem Computeralgebrasystem implementiert und wichtig für das effiziente Rechnen mit Bruchzahlen. Man kann damit auch schnell das kleinste gemeinsame Vielfache zweier positiver ganzer Zahlen a und b berechnen:

$$\mathrm{kgV}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a,b)}\,.$$

Den ggT von drei oder mehr Zahlen berechnet man sukzessive:

$$ggT(a,b,c) = ggT(a, ggT(b,c))\,,$$

man wendet also zweimal den Euklidischen Algorithmus an.

Die Berechnung des ggT ist im Lehrplan für die 6. Schulstufe vorgeschrieben. Es ist erfreulich, dass die Lehrbücher (Humenberger 2017) und (Salzger et al. 2022) dafür den Euklidischen Algorithmus verwenden. Viele andere Lehrbücher berechnen den ggT als Produkt der gemeinsamen Primfaktoren. Dieses Verfahren ist sehr ineffizient, weil es die Zerlegung von ganzen Zahlen in ihre Primfaktoren erfordert. Diese ist so aufwändig, dass zum Beispiel das RSA-Verfahren zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel (siehe zum Beispiel (Walz 2023) oder (Pauer 2019)) darauf beruht, dass die Faktorisierung einer großen Zahl in Primfaktoren in vernünftiger Zeit nicht möglich ist. Den ggT zweier Zahlen wird man nur dann als Produkt ihrer gemeinsamen Primfaktoren berechnen, wenn die zwei Zahlen schon als Produkte von Primzahlen dargestellt sind. Im Beispiel oben also $\mathrm{ggT}(23\cdot 31, 19\cdot 31) = 31$. Allerdings sind Primzahlen gar nicht Thema der Lehrpläne der Sekundarstufe 1. Ausführlichere Information dazu findet man zum Beispiel in (Pauer und Stampfer 2013).

5. Gauß-Elimination - ein Algorithmus mit Wahlmöglichkeiten

Ein anderer Algorithmus, der die Strategie von Abschnitt 3 verwendet, ist das Verfahren zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen durch *Gauß-Elimination*. Dieser Algorithmus stammt nicht von Gauß, sondern wurde erstmals in China (ca. 150 v. Chr.) publiziert und in Europa von Rolle und Newton (ca. 1690 n. Chr.) wiederentdeckt, siehe (Grcar 2011).

Wir beschränken uns hier auf Systeme von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten, also auf die folgenden Aufgaben:
Gegeben sind Zahlen a,b,c,d,e,f mit $(a,b,d,e) \neq (0,0,0,0)$. Gesucht sind alle Zahlenpaare (x,y) mit

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f.$$

Um sie zu lösen, ersetzen wir das System linearer Gleichungen durch ein einfacheres mit derselben Lösungsmenge und zwar so oft, bis wir eines erhalten, dessen Lösungsmenge ohne weitere Rechnung angeschrieben werden kann.

Welche Gleichungssysteme haben diese Eigenschaft, sind also *einfach* ? Wir unterscheiden drei Typen:

- Die Lösungsmenge von
  $$\begin{array}{ccccc} x & & & = & c \\ & & y & = & f \end{array}$$
  ist $\{(c,f)\}$.

- Die Lösungsmenge von
  $$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$
  ist $\{(\frac{a \cdot c}{a^2+b^2}, \frac{b \cdot c}{a^2+b^2}) + t \cdot (-b,a) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

- Die Lösungsmenge von
  $$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ & & 0 & = & 1 \end{array}$$
  ist leer.

Wir verwenden eine nützliche Eigenschaft von Systemen linearer Gleichungen:
Durch die folgenden drei *elementaren Umformungen* wird ein System linearer Gleichungen in ein anderes mit gleicher Lösungsmenge übergeführt.

Multipliziere auf beiden Seiten einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$.

Vertausche die zwei Gleichungen.

Ersetze eine Gleichung durch die Summe der zwei Gleichungen.

Man kann leicht zeigen, dass man mit diesen elementaren Umformungen jedes System in eines von einem der drei oben angeführten Typen überführen kann. Die Reihenfolge dieser Umformungen wählt man so, dass man einem dieser Typen mit jeder Umformung etwas näher kommt (siehe zum Beispiel Pauer 2018).

Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$2x+3y=4$$
$$-x+5y=2$$

Für die Wahl der Umformungen gibt es mehrere Möglichkeiten, etwa:

- Multipliziere die zweite Gleichung mit 2

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ -2x & + & 10y & = & 4 \end{array}$$

- Ersetze die erste Gleichung durch die Summe der ersten und der zweiten Gleichung

$$\begin{array}{rcrcr} & & 13y & = & 8 \\ -2x & + & 10y & = & 4 \end{array}$$

- Multipliziere die erste Gleichung mit $\frac{1}{13}$

$$\begin{array}{rcrcr} & & y & = & \frac{8}{13} \\ -2x & + & 10y & = & 4 \end{array}$$

- Multipliziere die zweite Gleichung mit $-\frac{1}{10}$

$$\begin{array}{rcrcr} & & y & = & \frac{8}{13} \\ \frac{1}{5}x & - & y & = & -\frac{2}{5} \end{array}$$

- Ersetze die zweite Gleichung durch die Summe der ersten und der zweiten

$$\begin{array}{rcrcr} & & y & = & \frac{8}{13} \\ \frac{1}{5}x & & & = & \frac{14}{65} \end{array}$$

- Multipliziere die zweite Gleichung mit 5 und vertausche die zwei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcr} x & & & = & \frac{14}{13} \\ & & y & = & \frac{8}{13} \end{array}$$

Dieses System hat die Lösungsmenge $\{(\frac{14}{13}, \frac{8}{13})\}$, daher ist das auch die Lösungsmenge des ursprünglichen Systems (und aller durch die Umformungen erhaltenen Systeme).

Auch für das System

$$2x+3y=4$$
$$-4x-6y=-8$$

gibt es mehrere Möglichkeiten, es mittels Gauß-Elimination zu lösen, etwa:

- Multipliziere die erste Gleichung mit 2

$$4x+6y=8$$
$$-4x-6y=-8$$

- Ersetze die zweite Gleichung durch die Summe der ersten und der zweiten Gleichung

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 6y & = & 8 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieses Systems ist $\{(2,0)+t\cdot(-6,4)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

Bei diesem Algorithmus sind die Einzelschritte nicht vorgegeben, sie können je nach Situation und Vorliebe von Schülerinnen und Schülern gewählt werden. Das sollte man auch zulassen, um so das selbständige Denken zu fördern. Es ist nicht sinnvoll, im Unterricht eine bestimmte Abfolge der elementaren Umformungen vorzugeben und je nach vorgegebener Abfolge das Verfahren noch eigens zu benennen, zum Beispiel *Einsetzungsverfahren*, *Gleichsetzungsverfahren*, $\ldots$. Alle diese Verfahren sind nur Varianten der Gauß-Elimination.

6. Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung - die ersten Algorithmen in der Schule

In diesem Abschnitt werden die Algorithmen für die vier Grundrechnungsarten (für natürliche Zahlen in Zifferndarstellung) besprochen. Diese vier Algorithmen haben eine gemeinsame Grundstruktur, weisen aber auch einige Unterschiede auf. Zunächst wird die Problemstellung präzisiert, dann wird der Reihe nach auf die Verfahren für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit Rest eingegangen.

6.1. Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

Was ist mit

$$\textit{Berechne}\ \ 378+253,\ 987-234\ \ \textit{und}\ \ 345\cdot 67\ \ \textit{!}$$

gemeint? Zunächst ist nicht klar, was zu berechnen ist. Die Zahlen $378+253,\ 987-234$ und $345\cdot 67$ sind ja eindeutig bestimmt und als Summe, Differenz, Produkt von zwei anderen dargestellt.

Die Aufforderung oben ist eine Kurzform von

$$\textit{Berechne die Zifferndarstellung (zur Basis } 10\textit{) von}\ \ 378+253,\ 987-234\ \textit{und}\ \ 345\cdot 67\ \ \textit{!}$$

Grundlage dafür ist der folgende Satz, der für jede natürliche Zahl $b>1$ gilt.

Zu jeder positiven ganzen Zahl a gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ *so, dass*

$$0\le z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0 < b,\ z_n\neq 0$$

und

$$a = z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_1 b^1 + z_0$$

ist.

Diese Darstellung von a heißt ihre *Zifferndarstellung zur Basis b*, die Zahlen $z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ heißen *Ziffern* von a (bezüglich der Basis b).

Wenn b fest gewählt ist (im Folgenden wird b immer 10 sein) schreibt man dafür kurz

$$a = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0\,.$$

Zum Beispiel wird die Zahl $3\cdot 10^2+7\cdot 10^1+8$ kurz als 378 angeschrieben.

Zur formalen Beschreibung der Algorithmen für die Addition und die Subtraktion ist es von Vorteil, auf die Bedingung $z_n\neq 0$ zu verzichten. Dann kann man annehmen, dass zwei betrachtete Zahlen gleich viele Ziffern haben, indem man bei einer davon einige Nullen als führende Ziffern hinzunimmt. Zum Beispiel hat dann 0012 gleich viele Ziffern wie 3456.

Die Zifferndarstellung einer Zahl ist eine *Zusatzinformation* über diese und erweist sich als sehr nützlich, zum Beispiel für das effiziente Rechnen mit natürlichen Zahlen oder für das Entscheiden, welche von zwei Zahlen die größere ist.

Man kann mit Zahlen aber auch dann rechnen, wenn sie anders dargestellt sind, zum Beispiel durch römische Zahlzeichen. Man bedenke etwa, dass der Mathematiker und Ingenieur Archimedes, der im 3. Jhd. v. Chr. lebte, für seine Berechnungen ohne die heutige Zifferndarstellung auskommen musste.

Um das Jahr 825 n. Chr. hat Muhammad al-Chwarizmi ein Buch über das Rechnen mit „indischen Ziffern“ veröffentlicht. Darin werden Algorithmen für das Rechnen mit Zahlen in Zifferndarstellung vorgestellt. Diese Algorithmen lernt man heute in der Volksschule. Sie sind zwar nicht die ältesten, haben aber zum Wort „Algorithmus“ geführt, siehe zum Beispiel (Ziegenbalg et al. 2010).

Alle diese Rechenverfahren sind für jede Basis $b > 1$ gültig, insbesondere auch für die Basis 2, bezüglich der natürliche Zahlen in den meisten Computern dargestellt werden. Im Folgenden beschränken wir uns aber auf die Basis 10.

Die Algorithmen für die Grundrechnungsarten können grob so beschrieben werden:

- Gegeben sind zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
  Gesucht ist die Zifferndarstellung ihrer Summe, ihrer Differenz (falls diese nicht negativ ist), ihres Produktes oder ihres ganzzahligen Quotienten sowie des Restes.
- Es werden einfache „Grundschritte“ mehrfach ausgeführt, um die Aufgabe schrittweise zu lösen.
- Dazu werden die Zifferndarstellung und die Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen verwendet.
- Die Grundschritte können nicht mit Hilfe des Algorithmus ausgeführt werden, sie müssen vorab erlernt werden.

Beim Unterrichten dieser Algorithmen ist es wichtig, die Grundschritte jeder Rechenart zuerst gut einzuüben und dann zu erklären, warum man durch deren mehrfaches Anwenden das richtige Ergebnis erhält.

6.2. Additionsalgorithmus

- Gegeben sind zwei natürliche Zahlen x und y in Zifferndarstellung. Gesucht ist die Zifferndarstellung ihrer Summe $x+y$.
- Die Grundschritte sind die Rechenoperationen des „kleinen Eins plus Eins“, also die hundert Additionen $x+y$ für $0 \leq x, y < 10$.
  Die Summe von zwei einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig und kleiner oder gleich 18. Ihre Zehnerziffer heißt „Übertrag“ (dieser ist 1, wenn die Summe größer als 9 ist, sonst 0).
- Die Ziffern mit gleichem Index der zwei Zahlen werden - beginnend mit den nullten Ziffern - addiert, ab den Ziffern mit Index 1 wird auch noch der Übertrag der vorangegangenen Addition addiert.
- Der Additionsalgorithmus verwendet die folgenden Rechenregeln: Summanden können vertauscht werden, bei mehrfacher Addition können Klammern weggelassen werden, man kann Herausheben und Ausmultiplizieren.

Wir betrachten zuerst ein Beispiel:

Addiere 378 und 253 !

$$\begin{aligned} 378+253 &= (3\cdot 10^2+7\cdot 10^1+8)+(2\cdot 10^2+5\cdot 10^1+3) = \\ &= (3+2)\cdot 10^2+(7+5)\cdot 10^1+(8+3) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 5 \cdot 10^2 + (10+2) \cdot 10^1 + (10^1+1) = \\
&= 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 1 = \\
&= 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = 631
\end{aligned}
$$

Der Additionsalgorithmus kann formal so formuliert werden:

> Gegeben: Zahlen x mit Ziffern $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ und y mit Ziffern $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0$.
>
> Gesucht: die Ziffern $z_{n+1}, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ von $x+y$.
>
> Berechne zuerst u_0 und z_0 mit $x_0 + y_0 = u_0 \cdot 10 + z_0$ und dann der Reihe nach
> für $i = 1, \ldots, n$ die Zahlen z_i und u_i mit $x_i + y_i + u_{i-1} = u_i \cdot 10 + z_i$.
> Setze $z_{n+1} := u_n$.

Technisch kann dieser Algorithmus durch ein *Addierwerk* (zumeist aber mit Ziffern bezüglich der Basis 2) realisiert werden (Abbildung 2):

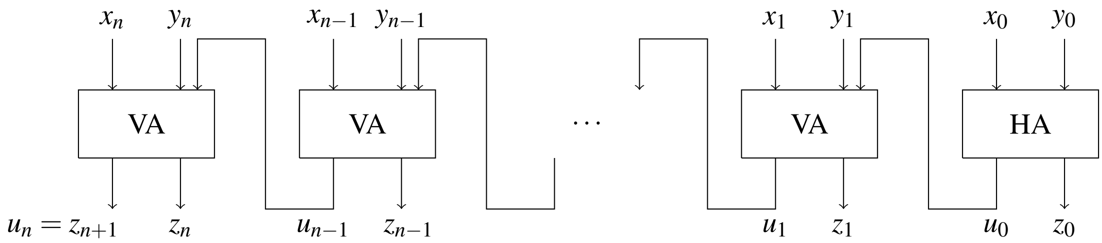


Abbildung 2: Skizze eines Addierwerkes

Dabei steht HA bzw. VA für die elektronischen Bauteile Halbaddierer bzw. Volladdierer. Der Halbaddierer gibt nach Eingabe zweier Ziffern die Ziffern ihrer Summe aus, der Volladdierer gibt nach Eingabe dreier Ziffern die Ziffern ihrer Summe aus.

6.3. Subtraktionsalgorithmus

- Gegeben sind zwei natürliche Zahlen x und y in Zifferndarstellung mit $x \geq y$. Gesucht ist die Zifferndarstellung ihrer Differenz $x - y$.
- Die Grundschritte sind die insgesamt 100 Subtraktionen $x - y$ für $0 \leq y \leq x < 10$ und $(10+x) - y$ für $0 \leq x < y < 10$.
  Das Ergebnis ist immer einstellig, der „Übertrag“ ist im ersten Fall 0, im zweiten Fall 1.
- Diese Grundschritte werden zuerst für x_0 und y_0 und dann der Reihe nach für x_i und $y_i + u_{i-1}$ (oder für $x_i - u_{i-1}$ und y_i) ausgeführt ($i > 0$). Dabei ist u_{i-1} der Übertrag aus dem vorangegangenen $(i-1)$-ten Schritt.
- Der Subtraktionsalgorithmus verwendet die folgenden Rechenregeln: Summanden können vertauscht werden, bei mehrfacher Addition können Klammern weggelassen werden, man kann Herausheben und Ausmultiplizieren.

Wir betrachten zuerst ein Beispiel:

Subtrahiere 378 von 524 !

$$
\begin{aligned}
524 - 378 &= (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4) - (3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8) = \\
&= (5-3) \cdot 10^2 + (2-7) \cdot 10^1 + (4-8) = \\
&= (5-3-1) \cdot 10^2 + (10+2-7-1) \cdot 10^1 + (10^1+4-8) = \\
&= 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 = 146\,.
\end{aligned}
$$

Der Subtraktionsalgorithmus kann formal so formuliert werden:

> Gegeben: Zahlen x mit Ziffern $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ und $y \leq x$ mit Ziffern $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_0$.
>
> Gesucht: die Ziffern $z_n, z_{n-1}, \dots, z_1, z_0$ von $x - y$.
>
> Falls $x_0 \geq y_0$ ist, berechne $z_0 := x_0 - y_0$ und setze $u_0 := 0$.
> Falls $x_0 < y_0$ ist, berechne $z_0 := 10 + x_0 - y_0$ und setze $u_0 := 1$.
> Für $i = 1, \dots, n$:
> Falls $x_i - u_{i-1} \geq y_i$ ist, berechne $z_i := x_i - u_{i-1} - y_i$ und setze $u_i := 0$.
> Falls $x_i - u_{i-1} < y_i$ ist, berechne $z_i := 10 + x_i - u_{i-1} - y_i$ und setze $u_i := 1$.

6.4. Multiplikationsalgorithmus

Die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl y mit einer natürlichen Zahl x ist als mehrfache Addition definiert.
Ein erster Algorithmus zum Multiplizieren ist daher: Addiere $(y-1)$-mal x zu x.

Mithilfe der Zifferndarstellung erhält man einen effizienteren Algorithmus:

- Gegeben sind zwei natürliche Zahlen x und y in Zifferndarstellung. Gesucht ist die Zifferndarstellung ihres Produktes $x \cdot y$.
- Die Grundschritte sind die die Multiplikationen mit Zehnerpotenzen $(10, 10^2, 10^3, \ , \dots \ )$ und die Multiplikationen des „kleinen Einmaleins", also $x \cdot y$ für $0 \leq x, y < 10$. Diese Produkte berechnet man mit dem ersten Algorithmus oder man prägt sich - zum schnelleren Rechnen - das kleine Einmaleins ein.
  Das Produkt von einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig, der „Übertrag" ist die Zehnerziffer dieses Produktes.
- Für alle j: Multipliziere x mit y_j durch mehrfaches Verwenden des kleinen Einmaleins und der Multiplikation mit Zehnerpotenzen (für alle i berechne $x_i \cdot y_j \cdot 10^i$ und addiere alle diese Produkte) und multipliziere $x \cdot y_j$ mit 10^j.
  Addiere für alle j die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.
- Der Multiplikationsalgorithmus verwendet die folgenden Rechenregeln: Summanden können vertauscht werden, Faktoren können vertauscht werden, bei mehrfacher Addition oder mehrfacher Multiplikation können Klammern weggelassen werden, man kann Herausheben und Ausmultiplizieren.
  Weiters wird der Additionsalgorithmus verwendet.

Beispiel:
Berechne die Zifferndarstellung von $345 \cdot 67$!

$$345 \cdot 67 = 345 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = (345 \cdot 6) \cdot 10 + 345 \cdot 7 =$$

$$= (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 \cdot 10 + (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5) \cdot 7 =$$

$$= (3 \cdot 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 6 \cdot 10 + 5 \cdot 6) \cdot 10 + (3 \cdot 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 7 \cdot 10 + 5 \cdot 7) =$$

$$= ((10+8) \cdot 10^2 + (2 \cdot 10 + 4) \cdot 10 + 3 \cdot 10) \cdot 10 + ((2 \cdot 10 + 1) \cdot 10^2 + (2 \cdot 10 + 8) \cdot 10 + (3 \cdot 10 + 5)) =$$

$$= (10^3 + (8+2) \cdot 10^2 + (4+3) \cdot 10) \cdot 10 + (2 \cdot 10^3 + (1+2) \cdot 10^2 + (8+3) \cdot 10 + 5) =$$

$$= (10^3 + 10 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10) \cdot 10 + (2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + (10+1) \cdot 10 + 5) =$$

$$= (2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10) \cdot 10 + (2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5) =$$

$$= 20700 + 2415 = 23115$$

Man kann das übersichtlich mit den folgenden Schreibweisen darstellen:

$$\begin{array}{r} 345 \cdot 67 \\ \hline 2070 \\ 2415 \\ \hline 23115 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} 345 \cdot 67 \\ \hline 2415 \\ 2070 \\ \hline 23115 \end{array}$$

Die Schreibweise links ist in vielen europäischen Ländern üblich, die rechts zum Beispiel in den USA oder in Syrien. Das übliche Weglassen der letzten Ziffer 0 von $345 \cdot 60$ (links in der zweiten Zeile bzw. rechts in der dritten Zeile) bringt wenig Schreibersparnis, aber erschwert vielleicht das Verständnis des Verfahrens. Schreibt man die 0 an, sieht man sofort, dass sich die zwei Schreibweisen nur durch die Reihenfolge der Summanden der abschließenden Addition unterscheiden.

Daraus ergibt sich der sachgerechte Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

- Zuerst werden die Grundschritte kleines Einmaleins und Multiplikation mit $10, 10^2, 10^3, \ldots$ eingeübt.
- Dann die Multiplikation einer Zahl mit einer einstelligen Zahl
- und schließlich der allgemeine Fall.

6.5. Algorithmus für die Division mit Rest

Die Division mit Rest einer natürlichen Zahl x durch eine positive ganze Zahl y berechnet natürliche Zahlen q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ und $r < y$ ist. Die Zahlen q und r sind eindeutig bestimmt und heißen *ganzzahliger Quotient* und *Rest* von x nach Division mit Rest durch y.

Ein erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest ist: subtrahiere y so oft wie möglich von x (solange die Differenz nicht negativ wird). Der ganzzahlige Quotient ist dann die Anzahl der Subtraktionen und der Rest ist die letzte (nicht negative) Differenz.
Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist also mehrfache Subtraktion.

Beispiel:
Dividiere 53 mit Rest durch 24!

$$53 - 24 = 29,\;\; 29 - 24 = 5 \text{ und } 5 < 24\,,$$

also ist

$$53 = 2 \cdot 24 + 5\,,$$

somit ist der ganzzahlige Quotient 2 und der Rest gleich 5.

Anmerkung: Statt $x = q \cdot y + r$ und $r < y$ schreibt man oft $x : y = q$, Rest r. Man nennt dann x Dividend und y Divisor. Division mit Rest ist aber eine Rechenoperation für natürliche (und ganze) Zahlen und darf nicht mit einer Division (der Umkehrung der Multiplikation) verwechselt werden. Diese ist eine Rechenoperation für rationale, reelle und komplexe Zahlen. Bei einer Division mit Rest werden zwei Zahlen berechnet (ganzzahliger Quotient und Rest), bei einer Division jedoch nur eine. Bei einer Division mit Rest spielt die Ordnungsrelation $<$ eine wichtige Rolle, bei einer Division aber keine.

Für die Entwicklung eines effizienten Algorithmus muss man sich überlegen, wie mit Hilfe der Zifferndarstellung Subtraktionen eingespart werden können. Die Idee dazu ist einfach:

Wenn man 24 zwei-mal von 53 abziehen kann, dann mindestens zwanzig-mal von 530 und mindestens zweihundert-mal von 5300.

Denn, wenn

$$53 = 2 \cdot 24 + 5$$

ist, dann ist

$$530 = 20 \cdot 24 + 50$$

und

$$5300 = 200 \cdot 24 + 500\,.$$

Das legt den folgenden Algorithmus für die „schriftliche Division (mit Rest)“ nahe, den man in der Volksschule kennen lernt.

- Gegeben: natürliche Zahlen $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ und $y \neq 0$ in Zifferndarstellung.
  Gesucht: die Zifferndarstellung der natürlichen Zahlen q und r mit

  $$x = q \cdot y + r \;\text{ und }\; r < y.$$

- Die Grundschritte sind die Divisionen mit Rest mit *einstelligem Quotienten* (das heißt, der Dividend ist kleiner als 10-mal der Divisor). Beispiele für Grundschritte sind 4321 : 567 oder 61 : 7, aber nicht 53 : 4 (weil $53 > 10 \cdot 4$ ist).
  Die Grundschritte werden mit dem ersten Algorithmus (mehrfaches - höchstens 9-maliges - Subtrahieren) ausgeführt (oder durch „Versuch und Irrtum“, das heißt: Abschätzen der nötigen Anzahl der Subtraktionen, Überprüfen durch Multiplikation und eventuell Korrektur der Abschätzung).
  Im Unterschied zu den ersten drei Rechenoperationen kann man sich bei der Division mit Rest die (unendlich vielen) Grundschritte nicht alle einprägen.

- Das effiziente Verfahren:

  - Setze $q := 0$.

  $*$ Es sei k die durch $x = s \cdot 10^k + t,\;\; y \leq s < 10 \cdot y$ und $t < 10^k$ eindeutig bestimmte Zahl. Dann ist $t = x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1 x_0$ und $s = x_n x_{n-1} \dots x_{k+1} x_k$.
  Dividiere nun s (durch mehrfache, höchstens 9-fache Subtraktion) mit Rest durch y und erhalte $s = q_k \cdot y + r_k$ und $r_k < y$.
  (Es ist $x = q_k \cdot 10^k \cdot y + (r_k \cdot 10^k + t)$). Ersetze q durch $q + q_k \cdot 10^k$.

  - Wenn $r_k \cdot 10^k + t$ kleiner als y ist, ist diese Zahl der gesuchte Rest und q der ganzzahlige Quotient. Ende. Sonst ersetze x durch $r_k \cdot 10^k + t$ und gehe zurück zu $*$.

- Der Algorithmus für die Division mit Rest verwendet die folgenden Rechenregeln: Summanden können vertauscht werden, Faktoren können vertauscht werden, bei mehrfacher Addition oder mehrfacher Multiplikation können Klammern weggelassen werden, man kann Herausheben und Ausmultiplizieren.
  Weiters werden der Subtraktionsalgorithmus und das Vergleichen zweier natürlicher Zahlen nach ihrer Größe verwendet.

Beispiel:
Dividiere 2023 mit Rest durch 19 !

Wir schreiben $2023 = 20 \cdot 10^2 + 23$ (es ist $19 < 20 < 10 \cdot 19$) und dividieren 20 mit Rest durch 19: $20 = 1 \cdot 19 + 1$, daher $2000 = 100 \cdot 19 + 100$ ($k = 2, q_2 = 1$).

$2023 = 100 \cdot 19 + 123$ und $123 > 16$.

Wir gehen wie oben mit 123 anstatt mit 2023 weiter:
$123 = 6 \cdot 19 + 9$ ($k = 0, q_0 = 6$)

Wegen $9 < 19$ ist das Verfahren beendet und $2023 = 100 \cdot 19 + 6 \cdot 19 + 9 = 106 \cdot 19 + 9$.
Der ganzzahlige Quotient ist 106 und der Rest ist 9.

Beachte, dass statt 106 Subtraktionen im ersten Algorithmus jetzt nur 7 Subtraktionen ausgeführt werden mussten!

Diese Vorgangsweise wird in der fachdidaktischen Literatur oft als „halbschriftliches Verfahren“ für die Division mit Rest bezeichnet, siehe (Pöll 2014) und die dort zitierte Literatur.

Das „schriftliche Verfahren“ verwendet noch eine weitere Überlegung :
Die Zahl k mit $x = s \cdot 10^k + t,\ \ y \leq s < 10 \cdot y$ und $t < 10^k$ wie oben muss nur am Anfang bestimmt werden. Wenn man auf die Bedingung $y \leq s$ verzichtet, kann man jeweils von k zu $k-1$ übergehen. Der ganzzahlige Quotient q_{k-1} kann dann auch 0 sein. Die der Reihe nach berechneten Zahlen $q_k, q_{k-1}, \ldots, q_0$ sind die Ziffern des gesuchten ganzzahligen Quotienten q.

Das schriftliche Verfahren zur Division mit Rest kann dann platzsparend so dargestellt werden:

$$\begin{array}{r}
20|23 \;:\; 19 = 106 \\
-1900 \\
\hline
12|3 \\
-000 \\
\hline
123 \\
-114 \\
\hline
9
\end{array}$$

oder noch kürzer

$$\begin{array}{l}
20|23 \;:\; 19 = 106 \\
\;\;12 \\
\;\;123 \\
\;\;\;\;\;\;9
\end{array}$$

Ein sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest ist:

- Zuerst den Grundschritt einüben: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten.
  (Die Anzahlen der Ziffern des Divisors spielt dabei keine Rolle !)
- Dann die Idee zum Einsparen von Subtraktionen erklären.
- Allgemeiner Fall, beginnend mit einfachen Zahlen, zuerst „halbschriftlich“.

Leider legt der Lehrplan für die Volksschule etwas anderes nahe, siehe (BMBWF 2023):

3. Schulstufe: *Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren durch einstelligen Divisor (ohne und mit Rest)*

4. Schulstufe: *Dividieren durch ein- und zweistelligen Divisor (ohne und mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden*

Es wird außer Acht gelassen, dass bei der Division mit Rest die Anzahl der Stellen des ganzzahligen Quotienten entscheidend ist, nicht die Anzahl der Stellen des Divisors!

7. Das Bisektionsverfahren - ein Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen stetiger Funktionen

Mit dem *Bisektionsverfahren*, das in der 10. Schulstufe unterrichtet wird, kann man die folgende Aufgabe lösen:

Gegeben sind reelle Zahlen a und b mit $a < b$, eine stetige Funktion f vom Intervall $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen) so, dass $f(a) \cdot f(b) < 0$ ist ($f(a)$ und $f(b)$ haben also verschiedenes Vorzeichen) und eine positive reelle Zahl ε.
Gesucht ist ein Intervall der Länge kleiner als ε, das eine Nullstelle von f enthält. (Eine Nullstelle von f ist eine Zahl z mit $f(z) = 0$).

Am Ende dieses Abschnitts zeigen wir, dass f in $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle hat (Zwischenwertsatz). Diese Aufgabe hat daher immer eine Lösung.

Wir verwenden die Strategie von Abschnitt 3:
Eine solche Aufgabe ist einfach zu lösen, wenn $b - a < \varepsilon$ ist. Dann ist $[a,b]$ das gesuchte Intervall.

Verändere die Aufgabe mehrfach so, dass der Definitionsbereich kleiner wird und die Funktionswerte von f an seinen Randpunkten weiterhin verschiedene Vorzeichen haben.

Sei $c := \frac{1}{2}(a+b)$ das arithmetische Mittel von a und b. Es ist $a < c < b$. Nun gibt es drei Fälle:

Wenn $f(c) = 0$, ist c eine Nullstelle von f und die Aufgabe ist gelöst.

Wenn $f(a) \cdot f(c) > 0$ ist, ersetze a durch c.

Wenn $f(a) \cdot f(c) < 0$ ist, ersetze b durch c.

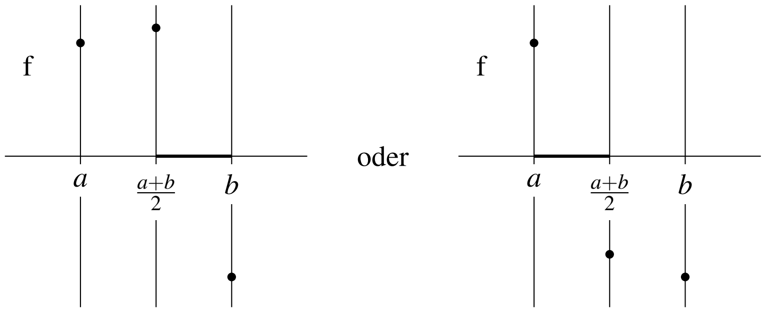


Abbildung 3: Die zwei Möglichkeiten für das neue Intervall

Das neue Intervall $[c,b]$ oder $[a,c]$ ist halb so lang wie das alte. Die Einschränkung der Funktion f auf das neue Intervall erfüllt die gleichen Bedingungen wie f. Man verändert das Intervall wie oben n-mal, wobei n so gewählt wird, dass $\frac{1}{2^n}(b-a) < \varepsilon$ ist.

Es muss noch begründet werden, dass es f (mindestens) eine Nullstelle hat.

Dazu seien $a_0 := a, b_0 := b$ und $([a_i,b_i])_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der wie oben konstruierten Intervalle. Die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und durch b nach oben beschränkt, die Folge $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und durch a nach unten beschränkt. Also konvergieren beide Folgen. Wegen $b_i - a_i < \frac{1}{2^i}(b-a)$ ist $\lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$, daher sind die Grenzwerte dieser zwei Folgen gleich. Wir bezeichnen ihn mit z. Weil f stetig ist, konvergieren die Folgen $(f(a_i))_{i\in\mathbb{N}}$ und $(f(b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z)$. Wir nehmen o. E. d. A. an, dass $f(a) > 0$ ist. Dann sind die Folgenglieder von $(f(a_i))_{i\in\mathbb{N}}$ alle ≥ 0 und die von $(f(b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ alle ≤ 0. Daher muss $f(z) = 0$ sein.

8. Schlussbemerkungen

In den Lehrplänen für den Mathematikunterricht sind von der 2. bis zur 12./13. Schulstufe viele Algorithmen verankert, leider wird das nicht ausreichend deutlich gemacht. Um die Schülerinnen und Schüler zum algorithmischen Denken hinzuführen, ist es wichtig, diese Verfahren nicht nur einzuüben, sondern auch gut zu motivieren, zu begründen warum sie korrekt sind und die ihnen zu Grunde liegenden Strategien zu besprechen.

Eine Anregung für vertiefenden Unterricht (und auch für die Lehrplankommissionen!):
Es gibt viele Algorithmen mit Bezug zum Lebensbereich der Schülerinnen und Schüler, die in der Schule unterrichtet werden könnten, zum Beispiel der RSA-Algorithmus, der etwa bei der Verschlüsselung des PIN-Codes einer Debitkarte verwendet wird, der Algorithmus von Dijkstra zur Berechnung kürzester Wege, der Algorithmus von Prim zur optimalen Planung von gewissen Versorgungsleitungen oder der Ungarische Algorithmus für optimale Personalzuteilung, siehe dazu zum Beispiel (Clark und Holton 1994). Mit manchen dieser Algorithmen können auch Themen der reinen Mathematik im Unterricht motiviert werden, zum Beispiel sind für den RSA-Algorithmus die Themen Primzahlen und ganzzahlige lineare Gleichungen von Bedeutung.

Die Kenntnis einiger Strategien und Ideen erleichtert es, Algorithmen für weitere Probleme zu entwickeln. Für die Vermittlung von *algorithmischem Denken* ist es wichtig, im Unterricht jedes „So berechnet man das!“ mit einem „Warum berechnet man das so?“ zu verbinden. Auch die Frage „Warum interessiert man sich dafür?“ soll gestellt und diskutiert werden. Ein solcher Unterricht lässt das Selbstbewusstsein der Schülerinnen und Schüler wachsen, weil sie erkennen können: „Ich kann durch Nachdenken Probleme lösen“ (siehe dazu auch Pauer 2021).

Literatur

BMBWF (2023): *Lehrplan der Volksschule.* Stand 2023. Online: https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html

Clark, J., Holton, D. A. (1994): *Graphentheorie: Grundlagen und Anwendungen.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Grcar, J. (2011): How ordinary elimination became Gaussian elimination. *Historia Mathematica 38*(2), 163 - 218.

Humenberger, H. (Hrsg.) (2017): *Das ist Mathematik 2.* Wien: öbv.

Kocher, M. (2020): Angst vor Algorithmen? Verhaltensökonomische Aspekte der Digitalisierung. Vortrag. *Lange Nacht der Forschung 9. Oktober 2020. Institut für Höhere Studien.* Wien. Online: https://www.ihs.ac.at/fileadmin/public/2016_Files/Documents/2020/langenachtderforschung_mk.pdf

Pauer, F., Stampfer, F. (2013): Primzahlen im Schulunterricht - wozu? *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 46*, 71 - 79.

Pauer, F. (2018): A computational approach to systems of linear equations. In: S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, M. Zandieh (Hrsg.): *Challenges and strategies in teaching linear algebra. ICME-13 Monographs* (S. 299 - 316). Cham: Springer Nature.

Pauer, F. (2019): *Algebra und Diskrete Mathematik, 4. Aufl.* Skriptum. Universität Innsbruck. Online: https://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/adm-2019/adm-2019-april-2019.pdf

Pauer, F. (2021): Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 53*, 107 - 116.

Pöll, J. (2014): *Die Division mit Rest in der Primarstufe.* Diplomarbeit. Universität Innsbruck.

Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., Ulovec, A. (2022): *Mathematik verstehen 2.* Wien: öbv.

Walz, G. (2023): *Das RSA-Verfahren: Verschlüsseln und Entschlüsseln auf Basis der Algebra.* Berlin: Springer Spektrum.

Ziegenbalg, J., Ziegenbalg, O., Ziegenbalg, B. (2010): *Algorithmen: Von Hammurapi bis Gödel, 3. Aufl.* Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch.

Anschrift des Verfassers

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
Fakultät für LehrerInnenbildung
Universität Innsbruck
Innrain 52
6020 Innsbruck
Österreich

franz.pauer@uibk.ac.at

Digitale Mathematik-Lernumgebungen für die Sekundarstufe: Ein Wechselspiel zwischen Empirie und Praxis

ROBERT WEINHANDL; EDITH LINDENBAUER; SELINA BALDINGER; MARKUS KAPPLMÜLLER; VIKTORIA RIEGLER; CARINA SCHOBERSBERGER, LINZ

Der vorliegende Konferenzbericht thematisiert die Entwicklung von Personas zur Erstellung schüler:innengerechter Mathematiksoftwares im Rahmen unserer Studie (Weinhandl et al., 2022; Weinhandl et al., 2023). Personas bilden dabei Repräsentant:innen einer bestimmten Schüler:innenpopulation, wobei jeder dieser fiktiven Charaktere für eine ausgewählte Teilmenge der Population steht. Der Bericht gibt Einblick in die iterative, datenbasierte Erstellung von Personas speziell für digitale Lernumgebungen im Fach Mathematik und setzt diese in Bezug zu den grundlegenden theoretischen Konzepten zum Technologieeinsatz im Unterricht. Darauf aufbauend wird die praktische Anwendung von Personas anhand der Initiative „FLINK in Mathe", die Mathematiklehrkräfte beim Technologieeinsatz im Unterricht unterstützen soll, exemplarisch dargelegt. An diesem Beispiel wird gezeigt, welche Aspekte technologiegestützten Lernens – abgeleitet aus den Personas – beim Erstellen von digitalen Materialien in besonderer Weise zu berücksichtigen sind, um potentiellen Bedürfnissen von Lernenden bestmöglich zu begegnen.

Einleitung

Der technische Fortschritt und die voranschreitende Digitalisierung führen zu umfassenden Veränderungen, die auch Auswirkungen auf das Bildungswesen haben. Dies gilt insbesondere in Österreich, wo unsere Studie (Weinhandl et al., 2022; Weinhandl et al., 2023) in der Sekundarstufe II durchgeführt wurde, da hier zwei besondere Voraussetzungen hinsichtlich des Technologieeinsatzes im Unterrichtsfach Mathematik herrschen (Weinhandl et al., 2021).

Als Reaktion auf die neuen Herausforderungen im Zusammenhang mit der Digitalisierung hat das österreichische Bildungsministerium einen 8-Punkte-Plan entwickelt (BMBWF, 2018). Im Zuge der Umsetzung dieses Plans sollen alle Schüler:innen der Sekundarstufe I Zugang zu einem eigenen digitalen Endgerät erhalten. Daher wurden im Schuljahr 2021/22 digitale Lerngeräte in der 5. und 6. Schulstufe ausgegeben. Ab dem Schuljahr 2022/23 erhalten alle nachrückenden Schüler:innen der 5. Schulstufe digitale Endgeräte. Darunter fallen Notebooks, Convertibles und Tablets mit externer Tastatur und optionaler Stifteingabe (Weinhandl et al., 2021). Ziel dieser Initiative ist es, die Grundlage für technologiegestützten Unterricht zu schaffen und allen Schüler:innen gleichermaßen den Zugang zu digitaler Bildung zu ermöglichen (BMBWF, 2023c).

Die zweite Besonderheit ist durch die standardisierte Reifeprüfung am Ende der Sekundarstufe II (Matura) gegeben, die im Fach Mathematik spezielle Anforderungen stellt. Die Prüfungsordnung AHS §18 (3) sieht die Verwendung digitaler Technologien zur Bewältigung der Mathematik-Matura vor, welche die grundlegenden Funktionen professioneller Mathematik-Softwares in schüler:innengerechter Form bieten:

> „Die Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel sind grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik." (BMBWF, 2023a)

Zu diesem Zweck können neben grafikfähigen, programmierbaren Taschenrechnern auch Computersoftwares zum Einsatz kommen, welche die genannten Ansprüche erfüllen.

Die genannten Gegebenheiten unterstreichen die Rolle digitaler Lernumgebungen im Unterricht. In diesem Artikel werden dazu zwei unserer Forschungsschwerpunkte genauer diskutiert, durch die Lehrende bei der Gestaltung und dem Einsatz digitaler Lernumgebungen unterstützt werden sollen:

einerseits die theoriebasierte Entwicklung von Personas für den Mathematikunterricht und deren Relevanz für die Gestaltung digitaler Lernumgebungen (Abs. 2) und andererseits das Projekt „FLINK in Mathe“ mit der Zielsetzung, digitale Materialien für die unmittelbare Praxis, basierend auf theoretischen fachdidaktischen Konzepten, zu erstellen (Abs. 3). Bevor genauer auf diese beiden Projekte eingegangen wird, beleuchtet dieser Artikel zuerst einige relevante Aspekte des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht.

1. Technologieeinsatz im Mathematikunterricht

Der Einsatz von Technologie kann mitunter neue Möglichkeiten im Mathematikunterricht eröffnen. Im Folgenden wird näher darauf eingegangen, indem zunächst die Möglichkeiten der Technologieintegration im Mathematikunterricht näher beschrieben werden und im Anschluss die Rolle von Lehrpersonen als Designer:innen von technologiegestütztem Unterricht beleuchtet wird.

1.1 Möglichkeiten der Technologieintegration im Mathematikunterricht

Zahlreiche mathematische Themen und Lehrstoffgebiete können durch Technologien unterstützt im Unterricht behandelt werden, folgende Themengebiete stellen somit nur einen Ausschnitt der vorhandenen Anwendungsmöglichkeiten dar. Computeralgebra Software-Programme können, wie ihr Name schon sagt, beispielsweise im Bereich der Algebra eingesetzt werden (Janßen, 2022), digitale Werkzeuge beim Verständnisaufbau des Funktionsbegriffs und der Entwicklung des funktionalen Denkens unterstützen (Günster & Weigand, 2022) und Tablet-Apps beim Erwerb arithmetischer Kompetenzen helfen (Ladel, 2022). Im Bereich der Geometrie kann mit dynamischen Geometrie-Softwares gearbeitet werden (Elschenbroich & Sträßer, 2022) und auch beim Thema Statistik können digitale Werkzeuge zum Einsatz kommen, um beispielsweise die Bearbeitung von großen realen Datensätzen zu ermöglichen (Eichler & Vogel, 2022). Weiters kann Augmented Reality bei der Erarbeitung des Volums- und Funktionsbegriffs und beim Modellieren im Mathematikunterricht eingesetzt werden (Beckmann, 2022). Auch beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen und der Veranschaulichung der Lösungen kann Technologie zur Anwendung kommen (Molnár, 2016).

Neben den Lehrstoffgebieten können auch die Handlungsdimensionen des Kompetenzmodells für Mathematik in der Sekundarstufe II durch Technologie unterstützt werden. Zu den Bereichen dieser Handlungsdimensionen gehören Darstellen, Modellbilden; Rechnen, Operieren; Interpretieren und Argumentieren, Begründen (BMBF, 2012). Die Handlungen „Darstellen und Modellieren” können mit Hilfe von Augmented Reality erfolgen. Mathematische Objekte können in einer solchen Umgebung beispielsweise mit geeigneten Repräsentationen veranschaulicht werden (Florian & Kortenkamp, 2022). Auch dynamische Geometrie-Softwares können beim Modellieren zum Einsatz kommen. Wichtig für die Entwicklung von Modellierungskompetenzen ist dabei die Sicherheit im Umgang mit dem Werkzeug (Hankeln, 2019). Im Bereich „Rechnen und Operieren” kann Technologie die Reduktion schematischer Abläufe und Verarbeitung großer Datenmengen ermöglichen (Heintz et al., 2016). So können mithilfe von Technologie beispielsweise Tabellen und Funktionsgraphen selbst erstellt werden, die im Anschluss auch zum Interpretieren verwendet werden können (Egger, 2022). Die Handlungen „Argumentieren und Begründen” können beispielsweise durch die Arbeit an einem Blog angeregt werden. In diesem können die Schüler:innen ihr Denken erklären, begründen und argumentieren und jenes ihrer Mitschüler:innen kommentieren (Stoyle & Morris, 2017).

1.2 Lehrpersonen als Designer:innen von technologiegestütztem Unterricht

Forschungen zum Technologieeinsatz im Unterricht können oft nur geringe positive Auswirkungen auf die Lernleistungen der Schüler:innen nachweisen (Drijvers et al., 2016). Laut Drijvers et al. (2016) ist die Annahme, dass digitale Technologien allgemein positiv oder negativ sind, nicht angemessen.

Vielmehr hängt deren Effekt von der Anwendung der konkreten Technologie, der pädagogischen Umgebung und der Inszenierung durch die Lehrperson ab. Es ist somit die Art und Weise der Umsetzung, die zählt. Auch Clark-Wilson et al. (2014) betonen die veränderte und komplexere Rolle von Lehrpersonen beim Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht.

Die Integration von Technologie im Mathematikunterricht kann durch bestimmte Faktoren gehindert, aber auch gefördert werden. Der erste relevante Faktor ist das Design der Technologie und der zugehörigen Aufgaben und Aktivitäten sowie das Design des Unterrichts. Weiters stellt die Rolle der Lehrperson einen wichtigen Faktor dar, da diese das Lernen organisieren muss, indem sie beispielsweise die Ergebnisse von technologiebasierten Aktivitäten zusammenfasst oder die Erfahrungen in der technologischen Umgebung mit anderen mathematischen Aktivitäten verknüpft. Den dritten Faktor bildet der Bildungskontext, der bei technologiebezogenen Aktivitäten berücksichtigt werden sollte (Drijvers, 2015).

Laut Roth (2019) spielen bei der erfolgreichen Integration von Technologie in den Unterricht die Schüler:innen, der Inhalt, die Lehrperson und das digitale Werkzeug eine wesentliche Rolle. Diese vier Aspekte können durch die Ecken im didaktischen Tetraeder, welches in Abbildung 1 dargestellt ist, veranschaulicht werden. Das digitale Tool oder Material fungiert dabei als Mittler zwischen den anderen drei Eckpunkten. Beim Verstehen und Problemlösen im Mathematikunterricht spielen alle vier Eckpunkte des didaktischen Tetraeders zusammen. Dennoch kann es sinnvoll sein, die spezifischen Beziehungen und somit einzelnen Flächen des Tetraeders zu fokussieren, analysieren und reflektieren. So bezieht sich die Grundfläche des Tetraeders rein auf Prozesse, die zwischen den Schüler.innen, der Lehrperson und dem mathematischen Inhalt stattfinden. Bei der hinteren Fläche kann es sich um einen Prozess handeln, bei dem die Lehrperson eine Lernumgebung zu einem mathematischen Inhalt unter Verwendung eines digitalen Werkzeuges konzipiert. Die rechte Fläche stellt Lern- und Problemlöseprozesse der Schüler:innen mit Hilfe digitaler Werkzeuge dar. Die vordere Fläche veranschaulicht die Unterstützung der Schüler:innen durch die Lehrperson bei der Verwendung digitaler Geräte durch die Vermittlung von Bedienungs-, Problemlöse- und Reflexionsstrategien (Roth, 2019).

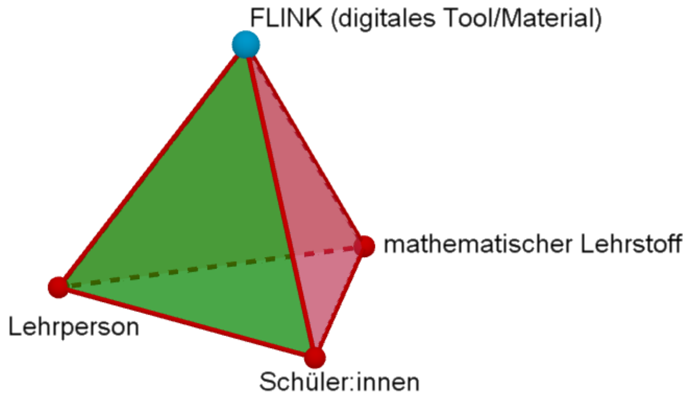


Abb. 1: Didaktisches Tetraeder modifiziert nach Trgalová, Clark-Wilson und Weigand (2018)

Laut Sawaya und Putnam (2015) sollten Lehrkräfte ihre Planung von Lernaktivitäten mit digitalen Geräten zudem an den mathematischen Lernzielen, den Lernaktivitäten für die Schüler:innen und den Vorteilen der verwendeten Technologie beim Mathematiklernen orientieren. Einen Aspekt zur Unterstützung beim Design von digitalen Lernumgebungen und Materialien bietet dazu das Konzept der Personas.

2. Personas im Kontext technologiegestützten Mathematiklernens

Personas sind fiktive, archetypische Nutzer:innen von technologiegestützten oder technologischen Systemen, die bei der Erstellung und Weiterentwicklung ebensolcher Systeme zum Einsatz kommen. (Antle, 2008; Minichiello et al., 2017; van Rooij, 2012). Das zugehörige Konzept stammt aus der User Experience Forschung (UX-Forschung) (Cooper, 2004).

Im Folgenden wird der Fokus auf Personas im Kontext technologiegestützten Mathematiklernens gelegt, indem näher auf das Konzept der Personas, theoretische Grundlagen zu Technologien im Mathematikunterricht und die Dimensionen des mathematischen Lernens eingegangen wird. Ferner wird diskutiert, wie mithilfe von Personas die Bedürfnisse einer Zielgruppe von Schüler:innen bestmöglich abgebildet werden können, um durch deren Einsatz die Benutzerfreundlichkeit digitaler Systeme zu optimieren.

2.1 Das Konzept der Personas

Personas repräsentieren potentielle User:innen, denen bestimmte Bedürfnisse, Wünsche, Erfahrungen, Kompetenzen, Interessen, Verhaltensweisen und ein bestimmtes Vorwissen zugeschrieben werden, worauf im Zuge der Systementwicklung eingegangen werden kann (Lilley et al., 2012; van Rooij, 2012). Darüber hinaus fließen verschiedene Emotionen wie Freude oder Angst in die Erstellung mit ein. Mittlerweile finden Personas in verschiedensten Gebieten Anwendung, so etwa im Bibliothekswesen (Lewis & Contrino, 2016; Zaugg & Rackham, 2016) und bei der Gestaltung und Erzeugung von Lernumgebungen (Lilley et al., 2012). Im pädagogischen Kontext bieten Personas die Chance, unterschiedliche Herausforderungen, mit denen Schüler:innen im Unterricht konfrontiert sind, greifbar zu machen, indem sie Informationen zur Schüler:innenpopulation in verdichteter Form wiedergeben. Anhand von Personas kann zudem implizites Wissen, das Lehrkräfte über Schüler:innen haben, explizit und sichtbar gemacht werden. Speziell im Bereich der Mathematikdidaktik der Sekundarstufe II existieren jedoch bisher nur vereinzelt Forschungsergebnisse zum Einsatz von Personas (Weinhandl et al., 2022).

Die Charakteristika der Personas sind nicht beliebig, sondern werden in einem systematischen Prozess definiert und ausgearbeitet. Es sind dabei zwei grundlegende Herangehensweisen zu unterscheiden. Werden Personas anhand bestehenden Datenmaterials sowie der Vorannahmen und Erfahrungen Einzelner entworfen, so ist von Ad-hoc-Personas die Rede. Werden zum Zweck der Erstellung hingegen gezielt Daten erhoben und analysiert, um tiefgreifende Einblicke in die zu repräsentierende Population zu gewinnen, so spricht man von datenbasierten Personas (Lilley et al., 2012; Minichiello et al., 2018).

In beiden Fällen werden Eigenschaften, die einer bestimmten Teilmenge der betreffenden Population zugeschrieben werden, in der entsprechenden Persona gebündelt. Das Resultat ist eine Art Steckbrief, welcher den Namen, ein Portrait und relevante Informationen enthält. Je nach Praktikabilität kann dieser als Fließtext, als Tabelle oder als Aufzählung strukturiert sein (Weinhandl et al., 2022).

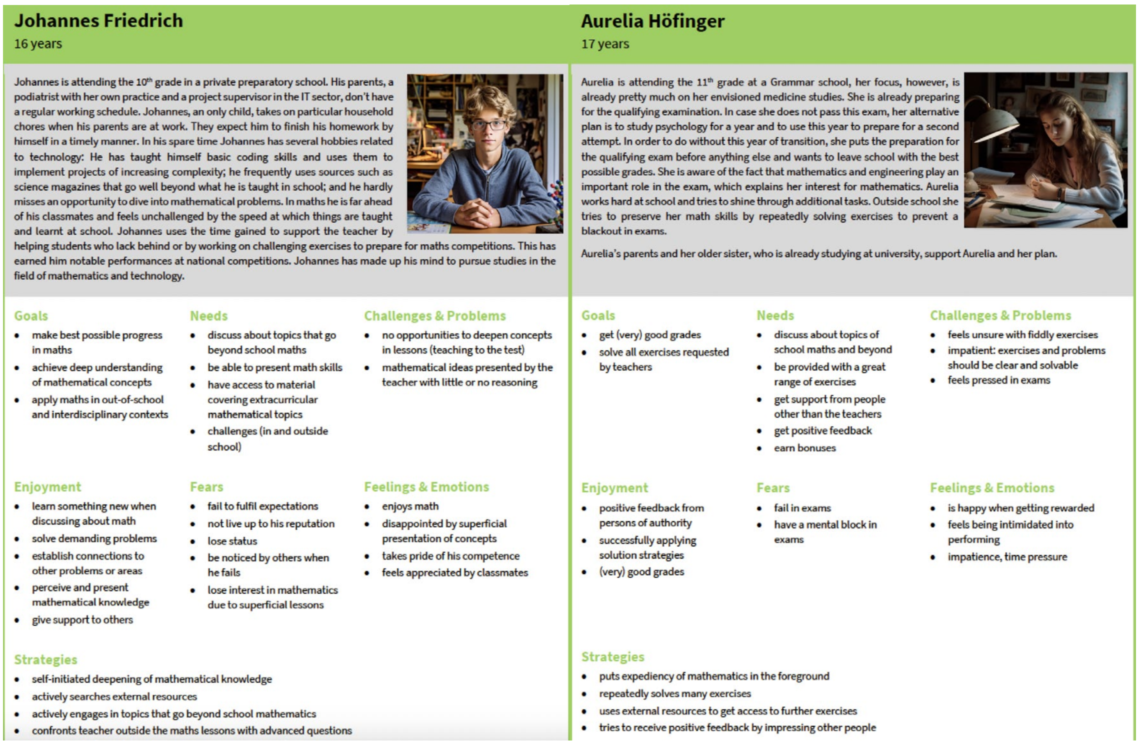


Abb. 2: Prototypische Personas von Mathematik-Schüler:innen

Die Verwendung fiktiver Charaktere, die in sich eine Vielzahl an Informationen in verdichteter Form transportieren, bietet gegenüber konventionellen Darstellungen empirischer Daten den Vorteil, dass Systemdesigner:innen die speziellen Ansprüche gewisser Gruppen von Nutzer:innen besser nachvollziehen können. Personas präsentieren nicht lediglich eine Zusammenfassung von Daten, sondern rufen bei den Rezipient:innen mehr Verständnis und Empathie für eine anonyme Zielgruppe hervor (Ferreira et al., 2015; Sundt & Davis, 2017; van Rooij, 2012; Vorvoreanu et al., 2016).

Die Erstellung von Personas beruht in der Regel sowohl auf qualitativen als auch quantitativen Daten, wobei neben Primärdaten auch Sekundärdaten in Betracht zu ziehen sind (Sundt & Davis, 2017; Volentine et al., 2017). Bei Primärdaten handelt es sich um Informationen, die direkt von der Zielgruppe der Nutzer:innen abgefragt werden. Zur Erhebung von Sekundärdaten werden nicht die Nutzer:innen selbst zu Rate gezogen, sondern Dritte, die Auskunft über sie geben können (Sundt & Davis, 2017; Volentine et al., 2017). Unsere Arbeit betreffend, werden darunter Lehrkräfte wie auch Lehramtsstudierende des Unterrichtsfaches Mathematik verstanden. Es wird davon ausgegangen, dass diese aufgrund pädagogisch-didaktischer Kenntnisse sowie eines bestimmten Maßes an berufspraktischer Erfahrung nützliches Wissen zur Schüler:innenpopulation innehaben.

Personas stoßen immer wieder auf Kritik, die vor allem auf Punkte wie Subjektivität, die Abhängigkeit von Sekundärdaten und die geringe Samplegröße zielt, die das Konzept mit sich bringt (Miaskiewicz et al., 2008; van Rooij, 2012; Volentine et al., 2017; Vorvoreanu et al., 2016). Daraus resultieren weitere Empfehlungen zur Qualitätssteigerung beim Erstellen von Personas. Diese umfassen das Entwerfen eines vordefinierten Systems für die Datenerhebung, die Berücksichtigung möglichst verschiedener Interessensgruppen, die schrittweise Evaluation und Verfeinerung der Personas, sowie die Verwendung aktuellen Datenmaterials (Lewis & Contrino, 2016; Miaskiewicz et al., 2008; Minichiello et al., 2018; Zaugg & Rackham, 2016).

In Anlehnung daran wurden im Zuge unserer Studie zur Entwicklung von mathematikbezogenen Schüler:innen-Personas (Weinhandl et al., 2022; Weinhandl et al., 2023) zuerst Ad-hoc-Personas entworfen, basierend auf von uns gesammelten Sekundärdaten zu Schüler:innen der Oberstufe. Mithilfe der Ad-hoc-Personas wurde unser Verfahren zur Datenerhebung in Form einer quantitativen Pilotstudie erprobt und anschließend überarbeitet. Nach Beendigung des Überarbeitungsprozesses wurde schließlich eine groß angelegte quantitative Befragung von Oberstufenschüler:innen durchgeführt. Auf diese Weise sollte die weitgehende Repräsentativität unserer Personas für Schüler:innen der Sekundarstufe II sichergestellt werden.

Personas sind ein neuartiger Versuch, die Eigenschaften von Lernenden besonders eindrücklich abzubilden. Über die Interpretation statistischer Kenngrößen wie Mittelwerten und Extrema hinweg liegt der Fokus vor allem auf speziellen Charakteristika ausgewählter Teilmengen der untersuchten Population (Weinhandl et al., 2023). Diese Informationen können auch bei der Konzipierung digitaler Lernumgebung für Schüler:innen dienlich sein, wie der folgende Abschnitt zeigen soll.

2.2 Mathematikunterricht in digitalen Lernumgebungen

Hinter sämtlichen Modellen zum Technologieeinsatz in der Schule und über alle gängigen Definitionen hinweg, steht die Idee, dass technologiegestütztes Lernen im Vergleich zu analogen Unterrichtsformen, gemessen an den Learning Outcomes, unter bestimmten Bedingungen einen Mehrwert bietet (Zeller & Barzel, 2010).

Werden digitale Elemente nicht nur gelegentlich in den Unterricht eingestreut, sondern bilden diese mitunter die Basis schulischen Lernens, so ist von Technology-enhanced learning environments (TELEs) die Rede. Diese enthalten unter anderem digitale Lernprogramme, -apps und -spiele (Fowler et al., 2021; Kurvinen et al., 2020; Law et al., 2016). Den TELEs liegen in der Regel lernpsychologische Ansätze zugrunde, die den Ideen des Konstruktivismus und des Sozialkonstruktivismus entspringen. Folglich stehen Problemlösen, kollaboratives Arbeiten und Schüler:innen-Zentriertheit im Mittelpunkt. Dies impliziert die individuelle Berücksichtigung von Vorwissen, Lerntempi, Geisteshaltungen und Perspektiven (Fowler et al., 2021; Keppell et al., 2015).

Zwar existiert bereits seit mehr als zwei Jahrzehnten ein breites Forschungsinteresse an technologiegestütztem Lernen, doch ist nach wie vor nicht vollständig geklärt, wie eine möglichst schüler:innengerechte digitale Lernumgebung auszusehen hat. Um der Antwort auf diese Frage näher zu kommen, sind möglichst detaillierte Informationen zur betreffenden Zielgruppe notwendig (Weinhandl et al., 2023). Der Wissensschatz praktizierender Lehrer:innen über das Lernverhalten ihrer Schüler:innen ist dabei als wesentlich zu erachten. Die Einbeziehung Lehrender in die Konzeption von TELEs kann sich demnach äußerst positiv auswirken (Chen & Woolcott, 2019; Kim, 2019).

2.3 Aspekte des mathematischen Lernens

Wie eingangs dargelegt, dienen Personas dem Zweck, die Charakteristika einer Zielgruppe differenziert und in möglichst vielen Facetten wiederzugeben. In jüngerer Vergangenheit wurde eine Reihe von Modellen publiziert, die jeweils unterschiedliche Faktoren und Persönlichkeitsmerkmale benennen, welche erfolgreiches Mathematiklernen bedingen (Anderson, 2007; Roesken et al., 2011; Liston & O'Donoghue, 2009). Die breite Palette veröffentlichter Ansätze ist symptomatisch für den nach wie vor fehlenden Konsens. Zu beachten sind vor allem die Überzeugungen, die mit Mathematiklernen in Verbindung stehen, sowie die Emotionen, die dabei hervorgerufen werden (Ignacio et al., 2006). Nach Empfehlung von Barkatsas et al. (2009) sind darüber hinaus die Einflüsse von Gender, der Grundhaltung zu Bildung und zur Mathematik, sowie das Lernengagement und die Leistung im Fach zu berücksichtigen. Aufgrund der Vielfalt möglicher Einflussfaktoren ist es daher unser Ziel, zentrale Aspekte des Mathematiklernens bei österreichischen Oberstufenschüler:innen zu ermitteln, die im Speziellen zur Erstellung von Personas grundlegend erscheinen. Im nächsten Abschnitt skizzieren wir den Ablauf der diskutierten Studie.

2.4 Methodologische Schrittfolge

Die Zielgruppe unserer Studie (Weinhandl et al., 2022; Weinhandl et al., 2023) bilden Schüler:innen der Sekundarstufe II im Alter von 14 bis 19 Jahren. Diese befinden sich in der Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung (Matura), die in Österreich zur Belegung eines Hochschulstudiums berechtigt. Je nach Schultyp liegt die reguläre Dauer weiterführender Schulen mit Maturaabschluss zwischen vier (AHS) und fünf (BHS) Jahren. Im Fach Mathematik fordert die schriftliche Reifeprüfung nicht lediglich fachspezifische Fähigkeiten, sondern ebenso Kompetenzen zur Handhabung zweckdienlicher Technologien. Die Aneignung dieser technologiebezogenen Kompetenzen steht im Zentrum unserer Untersuchung. Insbesondere aufgrund der wiederkehrenden Phasen anhaltenden Distance Learnings, bedingt durch mehrmaliger Schulschließungen während der Covid-19-Pandemie, wurde davon ausgegangen, dass die Schüler:innen zum Zeitpunkt der Datenerhebung bereits umfängliche Erfahrungen im Arbeiten in TELEs (Technology-enhanced Learning Environments) hatten.

Tab. 1: Überblick über die Phasen der Personas-Entwicklung

1. Phase	2. Phase	3. Phase	4. Phase
Basierend auf wissenschaftlicher Literatur und Sekundärdaten, Entwicklung von Ad-hoc-Personas und einem Personas-Framework	Qualitative Validierung und Weiterentwicklung der Ad-hoc-Personas und des Personas-Frameworks	Quantitative Pilotstudie zu den Personas und des Personas-Frameworks	Bundesweite quantitative Studie zu den Personas und des Personas-Frameworks
Daten & Stichprobe			
Wissenschaftliche Literatur und Sekundärdaten, 74 Lehramtsstudierende und Lehrkräfte im Fach Mathematik	Offenes schriftliches und mündliches Feedback, 83 Oberstufenschüler:innen, 18 Mathematiklehrkräfte, 4 Lehramtsstudierende des Faches Mathematik, 3 Universitätsmitarbeitende aus dem Bereich der Mathematikdidaktik	(Pilot-) Fragebogenstudie, 144 Oberstufenschüler:innen	Fragebogenstudie, 5 624 Oberstufenschüler:innen

Im Folgenden wird der bereits im Abschnitt 1.1 grob skizzierte Verlauf unserer Untersuchung im Detail erläutert. Den ersten Schritt bildete der Entwurf von Ad-hoc-Personas. Basierend auf bestehendem Datenmaterial wurde ein offener Fragebogen als Instrument für die Erhebung von Sekundärdaten entwickelt. In erster Linie wurden dazu die Datenbank der österreichischen Statistikbehörde (Statistik Austria, 2021), sowie der Nationale Bildungsbericht des Jahres 2015 (Bruneforth et al., 2016) und jener des Jahres 2018 (Breit et al., 2019) herangezogen. Der resultierende Fragebogen umfasst 13 open-ended Items. Die Befragten waren einerseits Mathematiklehrkräfte und andererseits Lehramtsstudierende des Unterrichtsfaches Mathematik. Insgesamt konnten Daten von 74 Teilnehmenden erhoben werden. Diese wurden aufgefordert, an eine:n ihrer Schüler:innen zu denken und unter anderem Angaben zu dessen:deren Zielen, Bedürfnissen, Emotionen und Lernstrategien zu machen. So wurden beispielsweise folgende Fragen gestellt:

> „Was sind die Ziele des:der Lernenden in Ihrem Mathematikunterricht und welche Strategien nutzt der:die Lernende, um diese zu erreichen?“, „Vor welchen Herausforderungen oder Problemen steht der:die Lernende beim Mathematiklernen?“ (Weinhandl et al., 2023, S. 9)

Da die Befragung online durchgeführt wurde, konnte eine geographisch weitreichende Stichprobe erfasst werden, was die Repräsentativität im Vergleich zu einer lokalen Erhebung deutlich steigert (van Rooij, 2012). Aus demselben Grund wurden bewusst Lehrkräfte befragt, die sich in verschiedenen

Phasen ihres beruflichen Werdegangs befinden. Die Verarbeitung der so gewonnenen Daten erfolgte entlang der Prinzipien der Grounded Theory (Charmaz, 2006; Glaser & Strauss, 1999; Woods et al., 2016) und mithilfe erprobter Techniken zur Erstellung von Personas (Weinhandl et al., 2022).

In einem zweiten Schritt wurden die Ad-hoc-Personas validiert und weiterentwickelt. Dazu wurden 83 Schüler:innen der Sekundarstufe II, 18 berufstätige Lehrkräfte, 4 angehende Lehrkräfte und 3 Universitätsmitarbeiter:innen aus dem Bereich der Mathematikdidaktik mit den Entwürfen der Personas konfrontiert. Zu bewerten war, inwieweit die entworfenen Personas mit Blick auf den jeweiligen Bekanntenkreis der Befragten realistisch bzw. repräsentativ erschienen. So wurden beispielsweise die erwähnten Oberstufenschüler:innen gefragt, ob sich unter ihren Mitschüler:innen Menschen befinden, die mit den vorgelegten Personas vergleichbar sind. Es wurden schriftliche wie auch mündliche Rückmeldungen eingeholt und verarbeitet. Daraufhin wurden die optimierten Versionen bei der Entwicklung von digitalen Mathematik-Lernressourcen und Lernumgebungen angewandt. Dadurch konnte ein Einblick in die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien unter Anwendung von Personas gewonnen werden. Auf diese Weise erhielten wir weitere Einschätzungen seitens der Material-Entwickler:innen zur Praxistauglichkeit der vorläufigen Personas.

Im dritten Schritt folgte auf die qualitative Validierung eine quantitative Evaluierung in Form eines weiteren digitalen Fragebogens. Als Grundlage dienten 30 bereits erprobte lernpsychologische Konstrukte, mittels derer alle Aspekte des Personas-Gerüsts abgedeckt werden sollten. Der so entwickelte Fragebogen wurde an einer Stichprobe von 144 Oberstufenschüler:innen pilotiert. Mit den Antworten der Schüler:innen wurde eine explorative Faktorenanalyse durchgeführt. Aufgrund hoher Korrelationen zwischen Items, konnte die Anzahl lernpsychologischer Konstrukte, die vorerst notwendig schien, um die Hälfte auf 15 reduziert werden. Die finale Version des Fragebogens umfasste schließlich 55 Items. Das lernpsychologische Konstrukt „Interesse” in unserer Studie umfasst zum Beispiel die Items „Ich mag Mathematik nicht wirklich.”, „Ich mag Mathematik, weil sie mein Denken anregt.” und „Ich habe wirklich Spaß an Mathematik.”.

Im vierten und letzten Schritt wurde schließlich eine bundesweite Fragebogenstudie an 141 AHS-Standorten durchgeführt. Von den insgesamt 9 000 Schüler:innen der Sekundarstufe II im Alter von 14 bis 19 Jahren bearbeiteten 5 634 die finale Version des im vorherigen Schritt beschriebenen digitalen Fragebogens ausreichend gehaltvoll, sodass eine Weiterverarbeitung der Daten möglich war. Dabei waren alle neun Bundesländer vertreten. Von den gültigen Proband:innen waren rund 60 % weiblich, 36 % männlich und weniger als 1,5 % nicht-binär. Etwa 2 % wollten keine Angaben zum Geschlecht treffen. Von allen Teilnehmenden besuchten 27,6 % die 9. Schulstufe, 28,5 % die 10. Schulstufe, 22,6 % die 11. Schulstufe, 20,6 % die 12. Schulstufe und 0,6 % die 13. Schulstufe.

Es bedarf nun eines weiteren Verarbeitungsprozesses, in welchem die so gesammelte Menge an Daten in die Entwicklung der Personas einfließt. Das Resultat wird Gegenstand zukünftiger Publikationen sein. Über die theoretische Fundierung und die datenbasierte Validierung der Personas hinaus, finden diese bereits Anwendung in der Adaptierung digitaler Unterrichtsmaterialien. Im folgenden Abschnitt soll die praktische Erprobung der Personas anhand eines solchen Beispiels ausgeführt werden.

3. FLINK in Mathe

Das Ziel des FLINK-Projektes (Förderung von Lernenden durch interaktive Materialien für einen nachhaltigen Kompetenzerwerb) der Johannes Kepler Universität Linz besteht darin, Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I durch digital zur Verfügung gestellte Aufgaben, die ergänzend zum Schulbuch verwendet werden können, zu unterstützen (Lindenbauer et al., 2022). Die im Projekt erstellten digitalen Materialien zielen darauf ab, durch eine Förderung des konzeptuellen Verständnisses von Schüler:innen deren Kompetenzerwerb zu unterstützen.

Laut Büchter und Leuders (2009) und Barzel et al. (2010) kann man den Mathematikunterricht in fünf Lern- und Beurteilungsphasen gliedern, von denen drei das Lernen und zwei das Beurteilen beinhalten. Diese sind: Erkunden, Entdecken, Erfinden; Sichern, Systematisieren; Üben, Verbinden, Wiederholen; Diagnostizieren und Beurteilen. Materialien und Aufgaben, die im Mathematikunterricht verwendet werden, sollten im Hinblick auf ihre jeweilige Rolle im Unterrichtsprozess gewählt oder erstellt werden (Büchter & Leuders, 2009). Das Ziel der FLINK-Materialien ist es, Schüler:innen beim Mathematiklernen zu unterstützen; deshalb konzentrieren sie sich vor allem auf das Entwickeln von konzeptuellem Wissen und tragfähigen Vorstellungen sowie das Üben von Fähigkeiten und Fertigkeiten, was den ersten drei der angeführten Phasen entspricht (Lindenbauer et al., 2022). Da sich Aufgaben zum Erkunden und Sichern jedoch nicht immer eindeutig voneinander unterscheiden lassen, werden Aufgaben zu den ersten beiden Lernphasen zusammengeführt, weshalb sich die FLINK-Materialien schlussendlich auf die beiden Phasen der Erforschung mathematischer Konzepte (*Entdecken*) und das Üben von Fähigkeiten und Fertigkeiten (*Üben*) fokussieren.

Die Materialien von FLINK in Mathe stellen einen neuen Weg dar, Mathematik mithilfe von Technologie zu lernen und darzustellen. Bezugnehmend auf Abbildung 1, stellen die im Projekt entwickelten digitalen Materialien einen Eckpunkt des didaktischen Tetraeders dar und dienen daher zur Vermittlung des Lernstoffes sowie als Mittler zwischen Lehrenden und Schüler:innen. Die FLINK-Materialien werden mit Hilfe von GeoGebra erstellt, da es sich dabei um eine Open-Source-Mathematiksoftware für Bildungszwecke handelt, die in österreichischen Schulen weit verbreitet ist. Weiters ermöglicht GeoGebra eine interaktive Verknüpfung verschiedener semiotischer Darstellungsformen mathematischer Objekte, was genutzt wird, um den Schüler:innen eine dynamische Interaktion mit dem Material zu ermöglichen. Die Objekte sind in GeoGebra in Form eines Online-Arbeitsblattes eingebettet. Dieses beinhaltet zum Teil zusätzlich weitere Aufgaben, auf die automatisch Rückmeldung gegeben wird, oder Erklärungen für die Schüler:innen. Aufgrund des Alters der Schüler:innen und ihrer begrenzten Erfahrungen mit GeoGebra handelt es sich bei diesen Materialien vor allem um Arbeitsblätter mit vorgefertigten Konfigurationen (Lindenbauer et al., 2022, Zbiek et al., 2007).

Lehrpersonen haben die Möglichkeit, speziell ausgewählte Materialien während ihres Unterrichts einzusetzen oder als Hausübung für die Schüler:innen zur Verfügung zu stellen. Ein Ziel der FLINK-Materialien ist es, dass diese im Vergleich zu Aufgaben, die mit Papier und Stift gelöst werden können, einen technologischen Mehrwert bieten (Lindenbauer et al., 2022). Daher werden bei den Materialien Funktionen wie automatisches Feedback, dynamische Visualisierungen und Zufallsgenerierung von Aufgaben genutzt (Lindenbauer et al., 2022; Roth, 2019; Fyfe & Rittle-Johnson, 2016).

Alle aktuell veröffentlichten Materialien sind unter dem Link https://www.jku.at/flink-in-mathe/ zu finden, wobei laufend neue Materialien veröffentlicht werden. Jede Materialsammlung besteht aus Aktivitäten, die das Entdecken mathematischer Konzepte und das Üben von Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Die Materialien zum Entdecken bestehen aus interaktiven Aufgaben zu neuen Konzepten, die durch begleitende Fragestellungen in Form von offenen oder Multiple Choice Aufgaben ergänzt werden. Die Materialien zum Üben beinhalten selbstüberprüfende Aufgaben, die per Knopfdruck unmittelbar Antworten, Hinweise, vorbereitete Lösungen oder neue Aufgaben liefern (Lindenbauer et al., 2022). Darüber hinaus werden zu manchen Unterthemen Videos, welche die Theorie zusammenfassen, oder einführende Aufgaben in die Arbeit mit mathematischen Softwares zur Verfügung gestellt.

Die Struktur der Materialien folgt dem österreichischen Mathematik Lehrplan für die Sekundarstufe I. In Abstimmung mit dem nationalen Kompetenzmodell beinhaltet der Lehrplan die vier verschiedenen inhaltsbezogene Dimensionen Zahlen und Maße, Variablen, Figuren und Körper und Modelle und Statistik. Die FLINK-Materialien beschäftigen sich daher mit diesen angeführten Inhaltsbereichen (BIFIE, 2011; BMBWF, 2023b).

4. Digitale Mathematik-Lernressourcen unter Berücksichtigung von Personas

Personas können als Hilfsmittel und Informationsquelle bei der Erstellung digitaler Mathematik-Lernressourcen dienen, was im Folgenden am Beispiel der FLINK-Materialien aufgezeigt wird. Die Personas weisen sowohl auf Bedürfnisse als auch auf Herausforderungen und Probleme potentieller Schüler:innen im Mathematikunterricht hin, worauf bei der Erstellung digitaler Materialien mit der Berücksichtigung unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade reagiert werden kann. Dieser Aspekt spiegelt sich in den FLINK-Materialien wider, indem bei Materialien zum Üben Aufgaben auf zwei unterschiedlichen Schwierigkeitslevels erstellt wurden, wie in Abbildung 3 zu sehen ist.

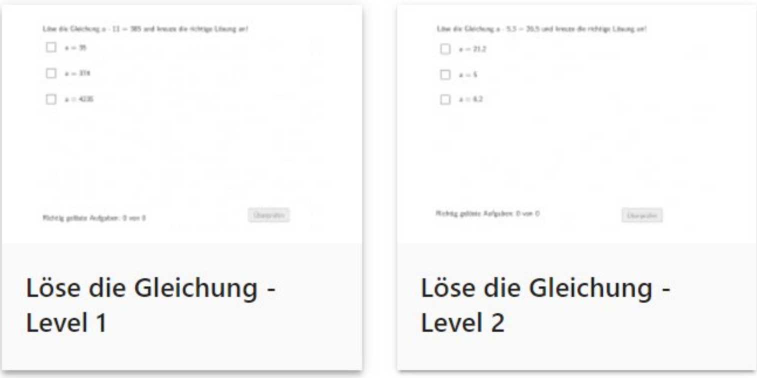


Abb. 3: Level 1 und Level 2 Aufgaben bei den FLINK-Materialien (https://www.geogebra.org/m/dqp5fzgz#chapter/753775)

Des Weiteren zeigen die Personas, dass sich leistungsstarke Schüler:innen Materialien wünschen, die über die Inhalte des Unterrichts hinausgehen. Entsprechend dazu sind bei den FLINK-Materialien schwierige Knobelaufgaben als Vertiefung zu finden. Um Schüler:innen ausreichend Übungsmöglichkeit zu bieten, muss ein großes Angebot an Übungen zur Verfügung gestellt werden. Bei FLINK wird ein möglicher Mehrwert des Technologieeinsatzes insofern genutzt, als per Mausklick unbegrenzt Übungen generiert werden können. Außerdem zeigen die Personas, dass einige Schüler:innen kleinschrittige Erklärungen schätzen, was bei den FLINK-Materialien durch die Integration von „Weiter" und „Zurück" Schaltflächen, wie sie in Abbildung 4 zu sehen sind, realisiert wurde. Dadurch können die Schüler:innen selbst bestimmen, wann sie zum nächsten Schritt weitergehen oder ob sie eine vorherige Information nochmal einblenden.

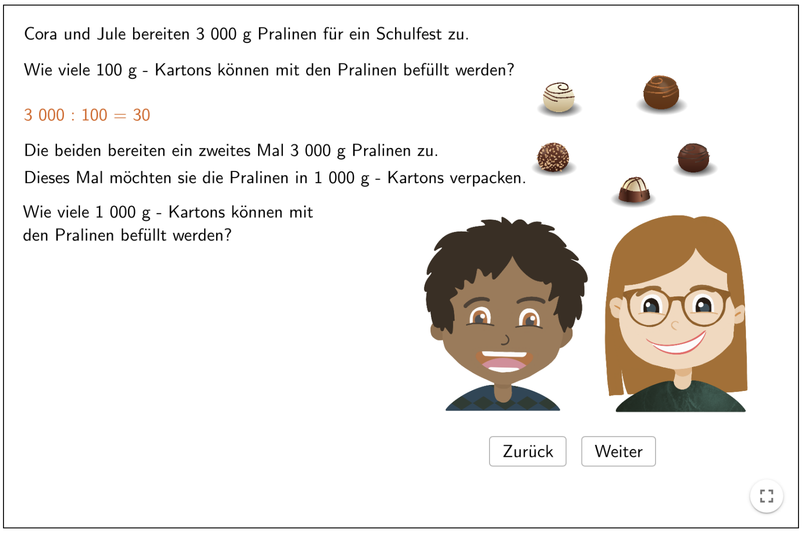


Abb. 4: „Weiter" und „Zurück" Schaltflächen in den FLINK-Materialien (https://www.geogebra.org/m/sgdunc6x#material/smwe4k4e)

Abgestimmt auf die Charakteristika der Personas, wurden die FLINK-Materialien mit zahlreichen Motivationselementen versehen. So wird bei den Materialien zum Teil ein Bezug zur realen Lebenswelt hergestellt oder versucht, Aufgaben in einen attraktiven Kontext einzukleiden, wie in Abbildung 4 zu sehen ist. Für Schüler:innen, die spielerisches Lernen besonders anspricht, bietet FLINK entsprechende Materialien. In Abbildung 5 ist eine Aufgabe zu sehen, wo die Lernenden durch schnelles Kopfrechnen ein Schneckenrennen gewinnen können.

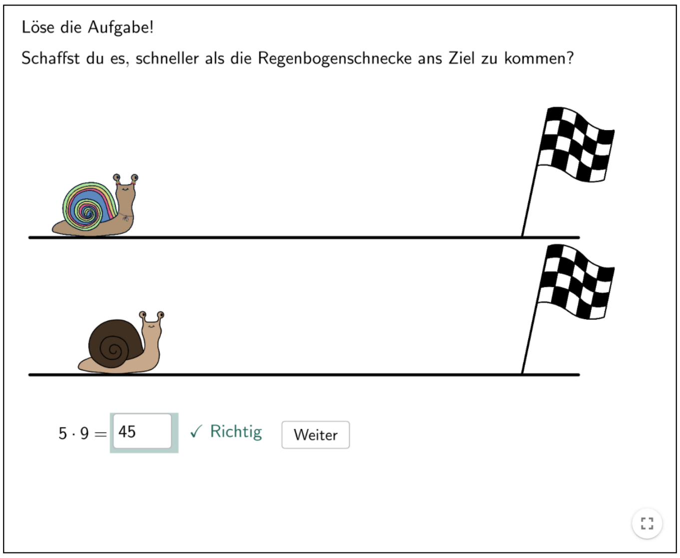


Abb. 5: Spielerisches Lernen beim Schneckenrennen (https://www.geogebra.org/m/vddawhhg)

Ein weiterer durch die Personas aufgezeigter Aspekt ist, dass die Motivation vieler Schüler:innen speziell von wiederkehrenden Erfolgserlebnissen beim Mathematiklernen abhängig ist. Die FLINK-Materialien ermöglichen dies durch optionale Hinweise, die bei Bedarf als Hilfestellung eingeblendet werden können. Dadurch bekommen Schüler:innen auf unterschiedlichen Leistungsniveaus die Chance, Aufgaben eigenständig zu lösen und Erfolgsmomente zu erleben. In Abbildung 6 ist ersichtlich, in welcher Form die Bereitstellung von Hinweisen bei den Materialien von FLINK erfolgt.

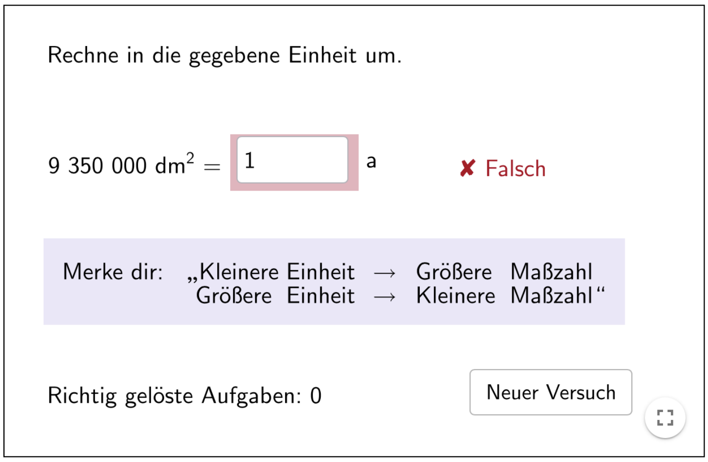


Abb. 6: Beispielhafte Darstellung eines Hinweises (https://www.geogebra.org/m/jzvrg9nx)

Ein weiterer Aspekt der FLINK-Materialien, welcher in Anlehnung an die Personas einige Lernende anspricht, liegt neben der kognitiven Aktivierung der Nutzer:innen in der Anregung zum aktiven Handeln, wie etwa die Bewegung und Manipulation von geometrischen Objekten. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 7 ersichtlich.

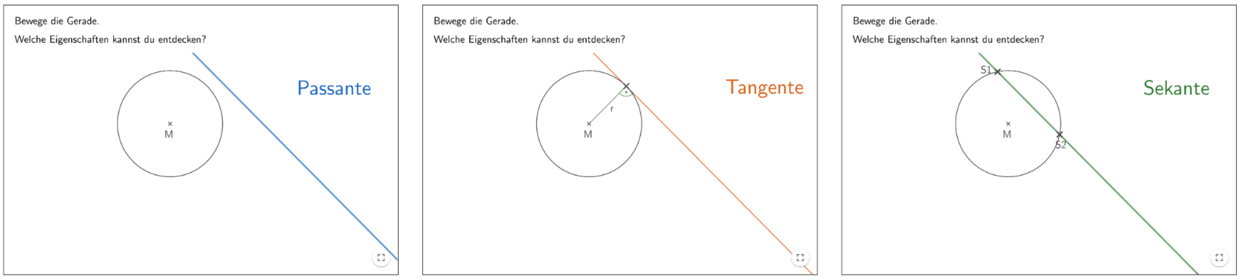


Abb. 7: Kennenlernen der Begriffe Passante, Tangente und Sekante durch verschieben der Gerade (https://www.geogebra.org/m/wjqb5nn8)

5. Zusammenfassung

Hinter jeder Persona steckt ein Geflecht aus Persönlichkeitsmerkmalen und persönlichen Vorstellungen, die das (Mathematik-)Lernen in unterschiedlicher Form und Intensität beeinflussen. Dazu gehören unter anderem Bedürfnisse, Erfahrungen, Interessen und Emotionen. Neben zahlreichen Benefits, die sich davon ableiten, finden sich in der Literatur auch einige Hinweise auf Schwächen des Personas-Konzepts. Diese beziehen sich in erster Linie auf Subjektivität und fehlende Repräsentativität. In der Absicht, bestmöglichen Profit aus den Erfahrungen bisheriger Forschungen zu schöpfen, wurden bestehende Kritikpunkte beim Entwurf unseres Entwicklungsplans vorab berücksichtigt. Bekannte Vorgehensweisen zur Erstellung von Personas wurden optimiert, indem die Kombination von Primär- und Sekundärdaten forciert wurde. Darüber hinaus wurde der Entwicklungsprozess in mehrere Phasen gegliedert, wobei auf eine qualitative Erhebung mittleren Umfangs eine breite quantitative Untersuchung folgte. Nach jeder Einarbeitung neuen Datenmaterials erfolgte eine Evaluierung der resultierenden Personas. Auf diese Weise wurde ein hoher Maßstab der Qualitätssicherung an die Schüler:innen-Personas gelegt.

FLINK in Mathe kann als eine digitale Lernumgebung angesehen werden, zu deren Verbesserung die Personas entwickelt wurden. Die Relevanz des FLINK-Projekts kann vor allem mit der voranschreitenden Digitalisierung und dem als Reaktion darauf vom österreichischen Bildungsministerium entwickelten 8-Punkte-Plan begründet werden, der eine umfassende Digitalisierung des Unterrichts vorsieht. Hinter der FLINK-Materialsammlung steht die Intention, Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I beim Einsatz von Technologie entsprechend mit qualitätsgesicherten Lernressourcen zu unterstützen. Die Materialien zielen darauf ab, die Schüler:innen beim Entwickeln konzeptuellen Wissens und tragfähiger Vorstellungen sowie dem Üben von Fähigkeiten und Fertigkeiten zu unterstützen. Damit jedoch das Potential von Technologie zugunsten eines optimalen Lernprozesses ausgeschöpft werden kann, bedarf es einer feinsinnigen Abstimmung der digitalen Umgebung auf die Bedürfnisse der Lernenden. Personas sollen dabei helfen, individuelle Voraussetzungen für erfolgreiches Lernen aufzuzeigen und für die Material-Entwickler:innen greifbar zu machen. Am Beispiel FLINK konnten einige Aspekte ausgemacht werden, die es mit Verweis auf die Personas im Speziellen zu beachten gilt.

Das vorgestellte Projekt soll einen Einblick in empirische und praktische Arbeiten im Kontext technologiegestützten Lernens geben. Die Entwicklung der Personas auf der einen Seite und digitaler Lernumgebungen auf der anderen Seite stehen dabei in reziprokem Verhältnis. In Anbetracht der hier dargelegten Ergebnisse scheint es sinnstiftend, diese wechselseitige Genese auch künftig zu forcieren.

Literatur

Anderson, R. (2007). Being a Mathematics Learner: Four Faces of Identity. *Mathematics Educator, 17*(1), 7–14.

Antle, A. N. (2008). Child-based personas: Need, ability and experience. *Cognition, Technology & Work, 10*(2), 155–166. https://doi.org/10.1007/s10111-007-0071-2

Barkatsas, A. (Tasos), Kasimatis, K., & Gialamas, V. (2009). Learning secondary mathematics with technology: Exploring the complex interrelationship between students' attitudes, engagement, gender and achievement. *Computers & Education, 52*(3), 562–570. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2008.11.001

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2010). *Mathematik Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II* (5.). Cornelsen Scriptor.

Beckmann, A. (2022). Zur Bedeutung von Augmented Reality im Mathematikunterricht der Sekundarstufen: Eine mathematikdidaktische Diskussion an zentralen unterrichtsrelevanten Aspekten. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung, 47*, 53–75.

Breit, S., Eder, F., Krainer, K., Schreiner, C., Seel, A., & Spiel, C. (2019). *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2018*, Band 1. https://doi.org/10.17888/nbb2018-1.4

Bruneforth, M., Lassnigg, L., Vogtenhuber, S., Schreiner, C., & Breit, S. (2016). *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2015* (4. Aufl., Bd. 1). https://doi.org/10.17888/nbb2015-1.4

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens [BIFIE] (Hrsg.) (2011). *Praxishandbuch für „Mathematik". 8. Schulstufe*. Leykam.

Bundesministerium für Bildung und Frauen [BMBF] (2012). *Mathematik an AHS. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben.* BM für Bildung und Frauen.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF]. (2018). *Masterplan Digitalisierung.* https://www.bmbwf.gv.at/Ministerium/Presse/Masterplan-Digitalisierung.html (Zugriff: 07.08.2023)

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF] (2023a, 7. August). *Gesamte Rechtsvorschrift für Prüfungsordnung AHS, Fassung vom 07.08.2023.* https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007845#:~:text=(3)%20On%20request%20of%20the%20examination%20candidate,the%20equivalency%20of%20the%20examination%20determines (Zugriff: 07.08.2023)

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF] (2023b, 7. August). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen.* https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568 (Zugriff: 07.08.2023)

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF]. (2023c, 7. August). *8-Punkte-Plan.* https://digitaleschule.gv.at/digitale-endgerate-fur-schulerinnen-und-schuler/ (Zugriff: 07.08.2023)

Büchter, A., & Leuders, T. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern – Leistung überprüfen* (4. Aufl.). Cornelsen Scriptor.

Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory: A Practical Guide through Qualitative Analysis* (1. Aufl.). SAGE Publications Ltd.

Chen, O., & Woolcott, G. (2019). Technology-enhanced mathematics learning: A perspective from Cognitive Load Theory. *Journal of Physics: Conference Series, 1320*(1), 012064.

Clark-Wilson, A., Aldon, G., Cusi, A., Goos, M., Haspekian, M., Robutti, O., & Thomas, M. O. J. (2014). The challenges of teaching mathematics with digital technologies-The evolving role of the teacher. PME.

Cooper, A. (2004). *The inmates are running the asylum: Why high-tech products drive us crazy and how to restore the sanity* (Bd. 2). Sams Indianapolis.

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (S. 135–151). Springer International Publishing.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey.* Springer Nature.

Eichler, A., & Vogel, M. (2022). Daten und Zufall mit digitalen Medien. In *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 277–301). Springer Spektrum.

Egger, G. (2022). *Kompetenzaufbau mit Mathematik-Software.* R&E-SOURCE.

Elschenbroich, H. J., & Sträßer, R. (2022). Geometrie und Digitalität. In *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 239–275). Springer Spektrum.

Ferreira, B., Silva, W., Oliveira, E., & Conte, T. (2015). Designing Personas with Empathy Map. *Proceedings of the 27th International Conference on Software Engineeringand Knowledge Engineering*, USA. https://doi.org/10.18293/SEKE2015-152

Florian, L., & Kortenkamp, U. (2022). Virtuelle Welten im Mathematikunterricht–Lernumgebungen in erweiterter Realität. In *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 137–162). Springer Spektrum.

Fowler, S., Cutting, C., Kennedy, J., Leonard, S. N., Gabriel, F., & Jaeschke, W. (2021). Technology enhanced learning environments and the potential for enhancing spatial reasoning: A mixed methods study. *Mathematics Education Research Journal*, 1–24.

Fyfe, E. R., & Rittle-Johnson, B. (2016). The benefits of computer-generated feedback for mathematics problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology, 147*, 140–151. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.03.009

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1999). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. AldineTransaction.

Günster, S. M., & Weigand, H. G. (2022). Der Beitrag digitaler Werkzeuge zur Entwicklung des Funktionsbegriffs und des funktionalen Denkens. In *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 163–188). Springer Spektrum.

Hankeln, C. (2019). *Mathematisches Modellieren Mit Dynamischer Geometrie-Software.* Springer Fachmedien Wiesbaden.

Heintz, G., Pinkernell, G., & Schacht, F. (2016). Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge. In G. Heintz, G. Pinkernell, F. Schacht (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich* (S. 12–21). Klaus Seeberger.

Ignacio, N. G., Nieto, L. J. B., & Barona, E. G. (2006). The affective domain in mathematics learning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 1*(1), 16–32.

Janßen, T. (2022). Algebra: CAS und mehr. In *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule* (S. 213-238). Springer Spektrum.

Kim, M. S. (2019). Developing a competency taxonomy for teacher design knowledge in technology-enhanced learning environments: A literature review. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning, 14*(1), 1–24.

Kurvinen, E., Kaila, E., Laakso, M.-J., & Salakoski, T. (2020). *Long term effects on technology enhanced learning: The use of weekly digital lessons in mathematics.* Informatics in Education.

Ladel, S. (2022). Tablet-Apps zur Unterstützung des Erwerbs arithmetischer Kompetenzen. In *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 189–211). Springer Spektrum.

Law, N., Niederhauser, D. S., Christensen, R., & Shear, L. (2016). A multilevel system of quality technology-enhanced learning and teaching indicators. *Educational Technology & Society, 19*(3), 72–83.

Lewis, C., & Contrino, J. (2016). Making the Invisible Visible: Personas and Mental Models of Distance Education Library Users. *Journal of Library & Information Services in Distance Learning, 10*(1–2), 15–29. https://doi.org/10.1080/1533290X.2016.1218813

Lilley, M., Pyper, A., & Attwood, S. (2012). Understanding the student experience through the use of personas. *Innovation in Teaching and Learning in Information and Computer Sciences, 11*(1), 4–13. https://doi.org/10.11120/ital.2012.11010004

Lindenbauer, E., Lavicza, Z., & Weinhandl, R. (2022). Initiating the development of a pre-service teacher training course based on research on students' digital resource and teaching designs. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12).*

Liston, M., & O'Donoghue, J. (2009). Factors influencing the transition to university service mathematics: Part 1 a quantitative study. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 28*(2), 77–87. https://doi.org/10.1093/teamat/hrp006

Miaskiewicz, T., Sumner, T., & Kozar, K. A. (2008). A latent semantic analysis methodology for the identification and creation of personas. *Proceedings of the SIGCHI conference on human factors in computing systems*, 1501–1510.

Minichiello, A., Hood, J. R., & Harkness, D. S. (2018). Bringing User Experience Design to Bear on STEM Education: A Narrative Literature Review. *Journal for STEM Education Research, 1*(1), 7–33. https://doi.org/10.1007/s41979-018-0005-3

Molnár, P. (2016). Solving a linear optimization word problems by using GeoGebra. *International Journal of Information and Communication Technologies in Education*, 5(2), 16–28.

Roesken, B., Hannula, M. S., & Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM, 43*, 497–506.

Roth, J. (2019). Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht–Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate. *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht: Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis*, 233–248.

Sawaya, S. F., & Putnam, R. T. (2015). Using mobile devices to connect mathematics to out-of-school contexts. *Mobile learning and mathematics*, 9–19.

Statistik Austria. (2021, 13. Oktober). *Bildung*. https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bildung/index.html (Zugriff: 07.08.2023)

Stoyle, K. L., & Morris, B. J. (2017). Blogging mathematics: Using technology to support mathematical explanations for learning fractions. *Computers & Education*, *111*, 114–127.

Sundt, A., & Davis, E. (2017). User personas as a shared lens for library UX. *Weave: Journal of Library User Experience, 1*(6).

Trgalová, J., Clark-Wilson, A., & Weigand, H. (2018). *Technology and resources in mathematics education.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315113562-12

Van Rooij, S. W. (2012). *Journal of Effective Teaching, 12*(3), 77–86.

Volentine, R., Whitson, L., & Tenopir, C. (2017). Portraits of success: Building personas from scholarly reading patterns. *Qualitative and Quantitative Methods in Libraries, 2*(1), 1–8.

Vorvoreanu,M., Madhavan, K., Kitkhachonkunlaphat, K., & Zhao, L. (2016). Designing for STEM faculty: The use of personas for evaluating and improving design. In V. Duffy (Hrsg.), *Digital Human Modeling: Applications in Health, Safety, Ergonomics and Risk Management. DHM 2016. Lecture Notes in Computer Science*, *9745*(S. 369–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40247-5_37

Weinhandl, R., Houghton, T., Lindenbauer, E., Mayerhofer, M., Lavicza, Z., & Hohenwarter, M. (2021). Integrating Technologies Into Teaching and Learning Mathematics at the Beginning of Secondary Education in Austria. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(12). https://doi.org/10.29333/ejmste/11427

Weinhandl, R., Mayerhofer, M., Houghton, T., Lavicza, Z., Eichmair, M., & Hohenwarter, M. (2022). Personas Characterising Secondary School Mathematics Students: *Development and Applications to Educational Technology. 12*(7), 447. https://doi.org/10.3390/educsci12070447

Weinhandl, R., Mayerhofer, M., Houghton, T., Lavicza, Z., Eichmair, M., & Hohenwarter, M. (2023). Mathematics student personas for the design of technology-enhanced learning environments. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, *18:32*. https://doi.org/10.58459/rptel.2023.18032

Woods, P., Gapp, R., & King, M. A. (2016). Generating or developing grounded theory: Methods to understand health and illness. *International Journal of Clinical Pharmacy, 38*(3), 663–670. https://doi.org/10.1007/s11096-016-0260-2

Zaugg, H., & Rackham, S. (2016). Identification and development of patron personas for an academic library. *Performance Measurement and Metrics, 17*(2), 124–133. https://doi.org/10.1108/PMM-04-2016-0011

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 1169–1207). Information Age Publishing.

Zeller, M., & Barzel, B. (2010). Die Rolle von Computeralgebra beim Lernen elementarer Algebra. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, 44. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 08. bis 12. März 2010 in München.*

Verfasser

Robert Weinhandl
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education – Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 96
4040 Linz
robert.weinhandl@jku.at

Edith Lindenbauer
Pädagogische Hochschule Oberösterreich
Fachbereich Mathematikdidaktik
Kaplanhofstraße 40
4020 Linz
edith.lindenbauer@gmx.at

Selina Baldinger
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education – Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 96
4040 Linz
selina.baldinger@jku.at

Markus Kapplmüller
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education – Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 96
4040 Linz
markus.kapplmueller@jku.at

Viktoria Riegler
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education – Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 96
4040 Linz
viktoria.riegler@jku.at

Carina Schobersberger
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education – Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 96
4040 Linz
carina.schobersberger@jku.at

Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gerichtssaal

RAJ SPIELMANN (GYMNASIUM KIRCHENFELD, BERN)

Wahrscheinlichkeiten sind bei Gericht allgegenwärtig, wenn Richter und Geschworene ihre Überzeugung zur Schuld oder Unschuld darlegen müssen. Eine Reihe von Justizirrtümern weist auf typische Fehler hin, die in der Interpretation von Zahlen oder im verwendeten Modell liegen. Hier sollen einige Fälle analysiert werden, darunter die Prozesse gegen den Footballprofi O. J. Simpson sowie gegen Sally Clark wegen doppeltem Kindsmord. Ein Ziel des Beitrags ist es, eine Brücke zwischen Mathematik und Geisteswissenschaften zu schlagen. Durch die Beleuchtung bekannter Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem neuen Kontext erhalten diese mehr Anschaulichkeit. Zugleich wird deutlich, wie wichtig die Mathematik im Alltag eines jeden werden kann und insbesondere für Juristen und Sozialwissenschaftler unverzichtbar ist.

1. Einleitung

Bei der Urteilsverkündung im Gerichtssaal sind Wahrscheinlichkeiten fehl am Platz, denn die Verurteilung darf nur bei gesichertem Strafbestand erfolgen. Leider zeigt ein Blick in Geschichte, dass die Realität oftmals fern von der Norm lag. Schon vor 1600 Jahren schrieb der Kirchenlehrer Augustinus (354-430) in seiner Funktion als Bischof von Hippo in einem Brief an einen Strafrichter seiner Diözese:

„Wir Menschen [. . .] lieben es, unsere Vermutungen Gewissheit zu nennen oder, wenn wir einige Wahrscheinlichkeitsgründe dafür haben, für sicher zu halten; und doch sind manche wahrscheinlichen Dinge unwahr, wie manche unwahrscheinlichen wahr.“

Wie Max Hirschberg deutlich macht, zieht sich diese Überschätzung von Wahrscheinlichkeiten wie ein roter Faden durch Jahrhunderte der Justizgeschichte. Dem bekannten deutschen Strafverteidiger gelang in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts eine Reihe spektakulärer Erfolge in schwierigen Revisionsprozessen, die er in seinem Buch (Hirschberg (1962)) untersuchte. Nach der umfangreichen Analyse von Justizirrtümern beschreibt er den Kern des Problems mit den Worten

„Die meisten Fehlurteile entstehen dadurch, dass der Richter bei der Wahrscheinlichkeit stehenbleibt, statt Gewissheit zu verlangen.“

Zur Abgrenzung beider Begriffe führt er aus:

„Die Evidenz, das Bewusstsein der Gewissheit, ist nicht ein höherer Grad von Wahrscheinlichkeit [. . .]. Gewissheit ist vielmehr die Überzeugung von der [. . .] Unmöglichkeit des Andersseins.“

Diese Überzeugung kann allein aus Untersuchung des konkreten Tatablaufs stammen. Insbesondere muss ein Motiv erkennbar und die Tat mit Hilfe gesicherter Spuren und Aussagen logisch nachvollziehbar sein. Fehlen Elemente, muss der Angeklagte aus Mangel an Beweisen freigesprochen werden.

Somit stellt sich die Frage, wie Wahrscheinlichkeiten überhaupt in den Gerichtssaal gelangen. Einer der Wege zur Beurteilung „wahrscheinlicher Vorgänge“ ist das intuitive Denken. Es erlaubt die schnelle Einschätzung von Situationen, wobei unbewusst auf Erfahrungswerte zurückgegriffen wird. Plausibilitätsbetrachtungen sind ein unverzichtbarer Teil des abstrakten Denkens. In den letzten Jahrzehnten kamen technische Verfahren hinzu, die an eine mathematische Auswertung gekoppelt werden müssen. Ein Beispiel sind DNA-Tests oder Verfahren zur Gesichtserkennung bzw. Identifikation von Stimmen. Schließlich verspricht die Künstliche Intelligenz nahezu grenzenlose Möglichkeiten bei Risiko- Bewertungen für mögliche Rückfalltäter (siehe Angwin u.a. (2016)) oder in Zukunft sogar zur kompletten Prozessführung.

Auf den ersten Blick mag scheinen, dass die modernen Methoden überhaupt nichts mit traditioneller Intuition gemeinsam haben. Das ist ein Irrtum, denn in jedem Fall liegt ein Modell zugrunde. Deshalb stellen sich folgende Fragen.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S. 133 -147

- Ist das verwendete Modell mathematisch korrekt?
- Ist es realitätsnah?
- Welchen Einfluss haben ungenaue Ausgangsdaten, mit denen man zwangsläufig zu tun hat?

Im Folgenden werden vier Gerichtsprozesse geschildert, bei denen falsche Berechnungen und Fehlinterpretationen von Wahrscheinlichkeiten schließlich zu Justizirrtümern beigetragen haben. Wer von den Angeklagten hier tatsächlich schuldig oder unschuldig war, sei dahingestellt. Meist fehlen die Fakten, um die Schuldfrage rückblickend zu beurteilen. Unter einem Fehlurteil verstehen wir einen Urteilsspruch auf der Grundlage fehlerhafter Prozessführung, der entweder korrigiert wurde oder zumindest korrigiert werden sollte – selbst um den Preis, dass der Schuldige davonkommt. Denn wer die Rechtsstaatlichkeit für die „gute Sache“ opfert, wird früher oder später in Willkür enden.

2. People v. Collins

2.1. Tatablauf und Prozess

Im Juni 1964 kam es in Los Angeles zu einem Straßenraub. Das Opfer, die ältere Juanita Brooks, wurde rücklings zu Boden gestoßen und sah von hinten, wie eine jüngere Frau ihre Brieftasche entriss und flüchtete. Ein Zeuge beobachtete, wie die Diebin in ein gelbes Fluchtauto stieg, an dessen Steuer ein Afroamerikaner saß. Ein derartiges Paar fiel im Straßenbild schnell auf, denn die Rassentrennung war noch lebendig. (Ihre vollständige Aufhebung auf Bundesebene erfolgte erst im Civil Rights Act vom 2. Juli 1964.)

Der Zeuge erinnerte sich, dass die Diebin dunkelblonde Haare und einen Pferdeschwanz, der Komplize dagegen einen Bart trug. Von Frau Brooks erfuhr die Polizei dagegen nur wenig. Sie hatte weder das Fluchtfahrzeug noch den Komplizen beobachtet und konnte sich weder an die genaue Haarfarbe noch an die Frisur der Diebin entsinnen. Damit hatte die Polizei nur spärliche Anhaltspunkte zur Tätersuche. Der Sohn des Opfers schritt nun selbst zur Tat und befragte sämtliche Tankstellen in der Nachbarschaft nach einem gemischtrassigen Paar in einem gelben Auto. Auf diese Weise gelangte die Polizei zur Adresse des Ehepaares Janet und Malcolm Collins. Gleichzeitig endete die Glückssträhne der Ermittler. Weder Opfer noch Zeuge konnten die Verdächtigen identifizieren. Da auch die genaue Uhrzeit des Raubes nicht mehr feststellbar war, ließ sich das Alibi der Verdächtigen nicht widerlegen.

Ray Sinetar war damals ein dreißigjähriger Staatsanwalt mit zwei Jahren Berufserfahrung. Er konnte nicht akzeptieren, dass der Fall trotz ausgesprochen seltener Übereinstimmungen nicht aufgeklärt werden sollte. Seine mathematischen Kenntnisse mögen laienhaft gewesen sein, doch überschritten sie das Durchschnittsmaß. Er beschloss, den Fall zu lösen, indem er den beobachteten Merkmalen ihre Wahrscheinlichkeiten zuordnete.

Festgestelltes Merkmal für Paare	**Wahrscheinlichkeit**
M_1: blonde jüngere Frau	1/3
M_2: jüngere Frau mit Pferdeschwanz	1/10
M_3: gelbes Auto	1/10
M_4: Mann mit Schnurrbart	1/4
M_5: bärtiger Afroamerikaner	1/10
M_6: gemischtrassiges Paar im Auto	1/1000

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten im Fall People v. Collins

Anschließend multiplizierte er und erhielt als Wahrscheinlichkeiten für ein weiteres Täterpaar

$$p = \prod_{k=1}^{6} p(M_k) = \frac{1}{12 \cdot 10^6} \tag{1}$$

Ein 26-jähriger Wahrscheinlichkeitstheoretiker, der an der California State University tätig war, bestätigte vor Gericht die Gültigkeit der Produktregel. Damit war die Jury überzeugt und das Ehepaar Collins wurde zu einer einjährigen Haftstrafe verurteilt.

2.2. Kritikpunkte und Revision

In den Medien rief der Fall ein beachtliches Echo hervor und selbst das Time Magazine berichtete im Januar 1965 von der ungewöhnlich scharfsinnigen Methode, mit welcher der junge Staatsanwalt den Fall gelöst hatte. Dennoch entschloss sich Malcolm Collins zum Antrag auf Revision. Zu seinem Glück war der 25-jährige Laurence Tribe am Obersten Gericht von Kalifornien als Assistent eines Richters tätig. Tribe hatte in Havard zunächst Mathematik studiert, bevor er zu den Rechtswissenschaften wechselte. Geübt erkannte er Schwachpunkte bei der Urteilsfindung:

- Die Werte aus Tabelle 1 sind Schätzwerte des Staatsanwalts und können nicht belegt werden.
- Ihre Multiplikation setzt die Unabhängigkeit voraus. Jedoch sind M_1, M_5 und M_6 abhängig.
- Da weder Opfer noch Zeuge die Angeklagten identifizieren konnten und die Mehrzahl der Angaben nur von einer Person stammten, sind die Aussagen mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

Hauptkritikpunkt ist jedoch ein mathematischer Fehler, der seitdem in der Literatur als „Trugschluss des Staatsanwalts“ bezeichnet wird:

Aus $p(\text{Tätermerkmale zutreffend}) \approx 0$ folgt keineswegs $p(\text{schuldig} \mid \text{Tätermerkmale zutreffend}) \approx 1$.

Auch mit seltenen Tätermerkmalen ist man nicht sofort schuldig, solange es genügend andere gibt.

Die folgende Argumentation bleibt sogar mit der stark herabgesetzten Wahrscheinlichkeit (1) aussagekräftig. Zur Veranschaulichung betrachten wir das untenstehende Baumdiagramm und berücksichtigen, dass es um 1964 in Kalifornien etwa 24 Mio. Paare im tatverdächtigen Alter ab.

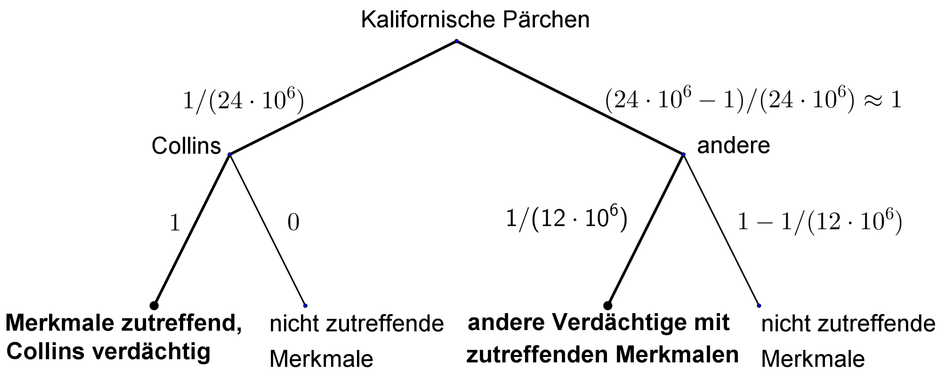


Abbildung 1: Baumdiagramm zur Täterwahrscheinlichkeit im Fall Collins

Bezeichnen wir die Ereignisse:

- T = „Die Tätermerkmale treffen zu.“
- Cs = „Die Collins sind schuldig.“

Dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(Cs \mid T) = \frac{p(T \cap Cs)}{p(T)} = \frac{p(Cs)}{p(T)} = \frac{\frac{1}{24 \cdot 10^6}}{\frac{1}{24 \cdot 10^6} + \frac{1}{12 \cdot 10^6}} = \frac{1}{3},$$

was zur Verurteilung bei weitem nicht ausreicht. Das Oberste Gericht von Kalifornien entschied folgerichtig auf Freispruch.

Unter den verschiedenen mathematischen Fehlern vor Gericht kann der „Trugschluss des Staatsanwalts“ als häufigster angesehen werden. Ein prominentes Beispiel ist das Verfahren gegen den französischen Hauptmann Alfred Dreyfus, der 1894 wegen Spionage verurteilt wurde. Der von Unregelmäßigkeiten und Vertuschungen überschattete Prozess führte zu innenpolitischen Spannungen, die bis zur Begnadigung im Jahre 1899 anhielten. Freispruch und Rehabilitation erfolgten erst im Juli 1906, nachdem der wahre Schuldige längst feststand. Neben dem Schriftsteller Emile Zola engagierte sich auch der Mathematiker Henri Poincare für Dreyfus, indem er ein Entlastungsgutachten mit Berechnungen in Wahrscheinlichkeiten vorlegte (vgl. Ranicki (2018), Colmez/Schneps (2013)). Zu den prominenten Fällen neuerer Zeit gehören die „Birmingham Six“ (Großbritannien, 1991) und „Guilford Four“ (Großbritannien, 1975), bei denen mehrere Iren fälschlicherweise beschuldigt wurden, an Attentaten der IRA beteiligt gewesen zu sein. Auch hier dauerte es Jahre, um die Gerichte von der Unschuld der Angeklagten zu überzeugen.

Der Freispruch für die Collins übte bedeutenden Einfluss auf die US-amerikanische Rechtssprechung aus, indem er die Aussagekraft kleiner Wahrscheinlichkeiten zum Nachweis der Einzigartigkeit relativierte. Es sollte Jahrzehnte dauern, bis man die alten Fehler im neuen Gewand von Hochtechnologien wiederholte. Auswertungen von DNA-Tests liefern ebenso geringe Wahrscheinkeiten, die unkritisch aufgenommen wurden, bis eine Reihe offensichtlicher Fehlinterpretationen ihre Grenzen deutlich machte (siehe Spielmann (2017)).

3. State v. Sneed

3.1. Tatablauf und Prozess

Am 18. August 1964 kehrte der 29-jährige Joe Sneed nach längerer Abwesenheit in seine alte Heimatstadt Silver City im US-Bundesstaat New Mexiko zurück und fand beide Eltern erschossen im Schlafzimmer ihres Hauses vor. Unverzüglich benachrichtigte er die Polizei. Bei der Autopsie stellte sich heraus, dass die tödlichen Schüsse von einem Revolver Kaliber 22 stammen.

Beim Mord wurden keinerlei Einbruchsspuren entdeckt, was den Verdacht nahelegte, dass der Täter einen Hausschlüssel benutzt hatte. Zwar war das zeitliche Zusammentreffen des seltenen Besuchs mit dem Doppelmord ungewöhnlich, doch einige der Polizisten kannten Sneed aus früheren Zeiten und die Befragung lief in einem freundlichen Ton ab. Die Hände wurden auf Schmauchspuren untersucht. Doch der Paraffintest zeigte nichts Auffälliges, ebenso ein Lügendetektortest. Als sich herausstellte, dass sein Auto noch vor dem Haus der Eltern stand, händigte er den Polizisten bereitwillig die Schlüssel aus, damit sie es ihm zurückbringen konnten. Zu ihrer Überraschung fanden diese im Auto die Quittung einer Hotelübernachtung auf den Namen Robert Crosset sowie eine weitere Quittung, die sich als Kaufbeleg für Munition erwies. Inzwischen war bekannt geworden, dass ein Unbekannter am Vortag des Mordes in der Nachbarstadt eine Pistole Kaliber 22 gekauft und dabei denselben Namen Robert Crosset mitsamt einer fiktiven Postadresse verwendet hatte. Joe Sneed wurde der Ermordung seiner Eltern angeklagt.

Auch hier war also eine beträchtliche Anzahl von Indizien vorhanden, doch die Beweislast blieb gering. Die Staatsanwaltschaft wendete sich an Prof. Edward Thorp, der als Professor an der New Mexico State University tätig war. Thorp galt als ausgewiesener Experte der Angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere in Verbindung mit Finanzen. Durch die Entwicklung einer Gewinnstrategie im Casinospiel Black Jack hatte er landesweit Berühmtheit erlangt. Sein Bestseller „Beat the Dealer“ erreichte märchenhafte Auflagen und man konnte davon ausgehen, dass es seine Autorität bei der Jury hoch verstärkte.

Thorp berechnete zunächst die Wahrscheinlichkeit für den im Westen der USA seltenen Familiennamen Crosset und multiplizierte den Wert mit der Wahrscheinlichkeit des Vornamens Robert und einiger anderer Merkmale. Er erhielt $p = \frac{1}{2{,}4 \cdot 10^{11}}$. Damit erschien die Existenz eines Namensdoppelgängers ausgeschlossen. Da Sneed durch die Quittung als Einziger mit dem Namen in Verbindung gebracht werden konnte und der Waffenkauf am Vortag des Mordes ebenfalls über diesen Namen lief, sah das Gericht seine Schuld als erwiesen an. Er wurde zu lebenslanger Haft verurteilt.

3.2. Kritikpunkte und Revision

Der Waffenkauf erfolgte unter einem fiktiven Namen, da es unter der angegebenen Adresse keinen Robert Crosset gab. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für die Existenz des ominösen „Robert Crosset, Box 210, Las Cruces“ gleich Null, wie es auch bei jedem anderen erfundenen Namen wäre. Sicherlich ist die Quittung in Sneeds Auto ein Indiz gegen ihn, doch vielleicht könnte ihm auch jemand eine Falle gestellt haben. Warum sollte man sich ausgerechnet mit demselben Pseudonym belasten, wenn man es problemlos wechseln kann? Entscheidend ist, dass alle polizeilichen Identifizierungen erfolglos blieben und die Spurensicherung keinerlei Beweise lieferte.

Thorps Rechnung wurde dem Gericht suspekt, sodass der Fall in Revision kam. Doch plötzlich geschah ein Wunder. Zwei Angestellte eines Hotels, die im ersten Prozess nichts beitragen konnten, waren imstande, ihren ehemaligen Gast Joe Sneed als Robert Crosset zu identifizieren. Bedenkt man, dass seit der Mordtat bereits zwei Jahre vergangen waren, klang das wenig glaubwürdig. Trotzdem bestätigte das Gericht das Urteil und Joe Sneed blieb weiter in Haft.

4. People v. O.J. Simpson

4.1. Tatablauf und Prozess

Im Juni 1994 wurde Nicole Brown in ihrem Haus in Los Angeles tot aufgefunden, zusammen mit ihrem Bekannten, dem ebenfalls ermordeten Ronald Goldman. Nicole Brown war die geschiedene Ehefrau von Orenthal James Simpson, einem legendären Footballspieler, der auch als Schauspieler in Fernsehserien auftrat. Der Verdacht lenkte sich schnell gegen O.J. Simpson, der seine Frau des öfteren schwer geschlagen hatte. Die Anklage ging von einem Streit aus, der zum Mord eskalierte.

O.J. Simpson war Multimillionär und setzte alle Mittel ein, um sich zu retten. Insgesamt ließ er sich den Prozess 6 Mio. Dollar kosten und gewann damit nicht nur die bestmöglichen Anwälte, sondern auch Experten der Spurensicherung, die über lange Jahre mit den Fehlern der Polizeiarbeit vertraut waren.

Einer der Verteidiger, der Havard-Professor Alan Dershowitz, versuchte die vorangegangene Misshandlung mit Hilfe der Statistik als Mordmotiv zu entkräften. Da von 2500 Männern, die ihre Partnerin oder Ex-Partnerin schlagen, nachweislich weniger als einer bis zum Mord ging, wäre die Misshandlung nicht prozessrelevant.

Auch die Spurensuche brachte wenig Überzeugendes. Als Hauptbeweisstück präsentierte die Anklage einen blutigen Handschuh, der jedoch Simpson bei der Anprobe im Gerichtssaal nicht passte. Zudem stand das Gericht von Anbeginn unter beträchtlichem öffentlichen Druck, da die Verteidiger dem Hauptermittler rassistische Äußerungen nachwiesen. Der Prozess, überschattet von lautstarken Protesten, die teilweise in Plünderungen ausarteten, endete im Oktober 1995 in einem Freispruch.

4.2. Kritikpunkte

Wir beschränken uns hier auf das Argument der Verteidigung.

$$p(\text{„Partner tötet Frau“} \mid \text{„Partner misshandelte Frau“}) = \frac{1}{2500} = 0{,}04\,\%$$

Das ist zwar korrekt, doch entkräftet es keineswegs das Mordmotiv. Da ein Mord begangen wurde, müssen wir stattdessen die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(\text{„Partner tötet Frau“} \mid \text{„Partner misshandelte Frau“ und „Frau wurde ermordet“})$$

untersuchen, wobei zunächst offen bleibt, wer den Mord begangen hat. Unter „Partner“ verstehen wir auch Ex-Partner.

Die jährliche Mordrate für Frauen lag damals in den USA bei 0,005 %. Mit dieser Wahrscheinlichkeit fiel auch eine misshandelte Frau einem fremden Mörder zum Opfer, denn dieser wählt seine Opfer eher nach einer günstigen Gelegenheit, ohne ihre Vorgeschichte zu kennen. Damit erhalten wir den folgenden Baum.

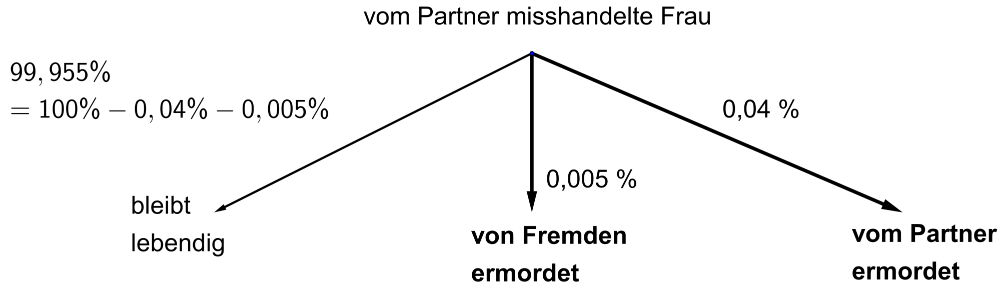


Abbildung 2: Baumdiagramm zur Täterwahrscheinlichkeit im Fall O.J. Simpson

Unter Kenntnis der vorangegangenen Misshandlung hat O.J. Simpson den Mord mit einer Wahrscheinlichkeit von 89 % begangen. Das allein ist kein Schuldbeweis. Doch es zeigt, dass die Misshandlung ein belastendes Moment gegen ihn darstellt.

Ohne die Information der Misshandlung würde man als Mordwahrscheinlichkeit für O.J. Simpson einen geringeren Wert erhalten. Im Jahre 1992 wurden in den USA 4936 Frauen ermordet, davon 1430 von Partnern bzw. Ex-Partnern. Damit ist

$$p(\text{Partner tötet Frau} \mid \text{Frau wurde ermordet}) = \frac{1430}{4936} = 29\,\%$$

Selbst diese Wahrscheinlichkeit liegt wesentlich höher als der vom Verteidiger angegebene Wert von $0,04\,\%$. Der Trick des Entlastungsarguments besteht in der Vernachlässigung des Fakts, dass Nicole Brown ermordet wurde.

Da die Medien vom Prozess berichteten, blieb der Fehler nicht unbemerkt. Mehrere Mathematiker, darunter der emeritierte Statistikprofessor Irving John Good erkannten das Problem. Er schrieb an die Zeitschrift „Nature“ (siehe Good (1995)), Simpsons Verteidigung und die Polizei, jedoch ohne Erfolg.

5. Regina v. Sally Clark

5.1. Tatablauf und Prozess

Im Laufe eines Jahres verlor die Familie Clark aus der Grafschaft Cheshire in England zwei neugeborene Kinder. Im Dezember 1996 starb ihr Sohn Christopher im Alter von 11 Wochen. Als Todesursache wurde ein Atemwegsinfekt diagnostiziert. Etwa ein Jahr später folgte sein nachgeborener Bruder Harry, der nur 8 Wochen alt wurde und am selben Tag eine reguläre Impfung erhalten hatte (siehe Hodgkinson (2007), Colmez/Schneps (2013)). Da der Arzt keine eindeutige natürliche Todesursache feststellen konnte und der Körper einige Verletzungsspuren aufwies, kam es automatisch zur Mordanklage gegen die Mutter Sally Clark. Gleichzeitig wurde eine Überprüfung des ersten Todesfalls angeordnet.

Als Gutachter wurde der Pädiater Dr. Roy Meadow engagiert. Der Professor hatte sich bei der Untersuchung des Münchhausen-Stellvertretersyndrom, subtiler Kindesmisshandlung durch ein Elternteil, einen Namen gemacht. Sein Forschungsgebiet ging also eher in Richtung Mord. Als Alternative zog er den plötzlichen Kindstod (SIDS, sudden infant death syndrome) in Betracht.

Per Definition ist SIDS der „plötzliche Tod eines Säuglings oder Kleinkinds, für den trotz Autopsie und Untersuchung des Auffindeortes keine Ursache – wie zum Beispiel Krankheit oder Unfall – ermittelt werden kann“ (siehe Poets/Jorch (2020), Duncan/Byard (2018)).

Der Begriff ist eine Sammelbezeichnung für den Tod für Säuglinge unter einem Jahr, der durch mehrere natürliche Faktoren herbeigeführt wurde. Inbegriffen sind Todesfälle unbekannter Ursache, solange sie nicht vorsätzlich herbeigeführt wurden. Schon die Definition zeigt eine gewisse Problematik. Wenn eine Ursache unbekannt ist, dann muss sie nicht nicht zwangsläufig natürlich sein.

SIDS tritt in Mitteleuropa relativ selten auf, was die Untersuchung seiner Einflussfaktoren erschwert. Bekannt ist, dass neben dem Gesundheitszustand des Kindes und Lebensgewohnheiten der Eltern (z.B. Zigaretten- und Alkoholkonsum) auch die Gewohnheiten des Kindes eine beträchtliche Rolle spielen. Risiken stellen beispielsweise die Schlafposition auf dem Bauch, ungeeignete bzw. überwärmte Betten oder auch das Teilen eines gemeinsamen Betts mit der Mutter dar (siehe Blair (2009)).

Da Säuglinge leicht verletzbar sind und wichtige Organe sowie das Immunsystem noch nicht vollständig funktionieren, ist die Unterscheidung von SIDS und Mord eine anspruchsvolle Aufgabe. Die Relevanz von Vorerkrankungen sowie die Unterscheidung zwischen bewusster und unbewusster Fehlbehandlung, beispielsweise durch einen ungeschickten Wiederbelebungsversuch, erfordert beträchtliche Erfahrung.

Untersucht man SIDS auf Basis der Statistik, so teilt man die Eltern in Risikogruppen ein. Zur damaligen Zeit lag in England die Wahrscheinlichkeit für SIDS in der höchsten Risikogruppe bei 1/1303, während sie in der niedrigsten Risikogruppe nur 1/8500 betrug.

Zur Abschätzung eines wiederholten SIDS-Falls begutachtete Prof. Meadow die Lebensumstände der Familie Clark. Beide Eltern waren relativ jung und gehörten zum wohlsituierten, akademischen Mittelstand. Da keinerlei Risikofaktoren sichtbar waren, ordnete Meadow die Familie in die tiefste Risikogruppe ein. Als Wahrscheinlichkeit eines doppelten SIDS erhielt er

$$\left(\frac{1}{8500}\right)^2 = 1,37 \cdot 10^{-8}$$

Da ein derartiges Doppelereignis in England nur etwa alle 104 Jahre auftritt, betrachtete er Mord als wahrscheinlich.

Der Pathologe Dr. Williams stellte beim toten Harry zwar keine Krankheiten, jedoch eine Reihe von Verletzungen fest, darunter ein vier Wochen alter Rippenbruch. Dem erstgeborenen Christopher attestierte er einen unnatürlichen Erstickungstod. Damit ließ sich die Jury vom Doppelmord überzeugen und das Gericht verurteilte Sally Clark im November 1999 zu lebenslanger Haft.

5.2. Kritikpunkte und Revision

Nach der Urteilsverkündung mehrten sich die Proteste. Sie wurden von der Presse und Abgeordneten getragen, doch zu den Kritikern gehörten auch namhafte Biologen, Mathematiker und Statistiker, darunter die Präsidenten der Royal Statistical Society (RSS) und der Mathematical Association (MA). Zu offensichtlich war die Existenz genetischer Faktoren, die zu einer gewissen Abhängigkeit bei wiederholtem SIDS führen mussten. Meadows pauschalisierter Ausspruch

„One sudden infant death is a tragedy, two is suspicious and three is murder, unless proven otherwise."

rief Widerspruch hervor, da er ein vereinfachtes Modell verabsolutierte.

Zu den Autoren von Entlastungsgutachten gehörte der Mathematiker Ray Hill. Als Datenbasis benutzte er die britische CESDI-Studie mit dem Untersuchungszeitraum 1993-1996 (siehe Fleming (2000)). Bezeichnet man mit S_1 den ersten und mit S_2 den zweiten SIDS-Fall innerhalb einer Familie, so lässt sich aus den statistischen Daten eine Abhängigkeit ablesen:

$$p(S_2 \mid S_1) = \frac{1}{100} \tag{2}$$

Trat SIDS innerhalb einer Familie mehrfach auf, so müssen zumindest versteckte Risikofaktoren vorhanden sein. Eine derartige Familie läge nicht in der tiefsten, sondern in der höchsten Risikoklasse:

$$p(S_1) = \frac{1}{1303}$$

Als Wahrscheinlichkeit für einen doppelten SIDS-Fall berechnet man

$$p = p(S_1) \cdot p(S_2 \mid S_1) = 7,67 \cdot 10^{-6}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wäre Ende der 90er-Jahre jährlich mindestens ein Wiederholungsfall von SIDS in einer britischen Familie zu erwarten gewesen? In England und Wales wurden damals jährlich etwa 650.000 Kinder geboren. Circa 60 % der jungen Familien mit Kindern hatten mindestens zwei Kinder. Damit war die jährliche Anzahl der Geburten mit einem irgendwann vorangegangenem Geschwisterkind

$$n = 60\,\% \cdot 650.000 = 390.000$$

und wir erhalten $n \cdot p = 2,993$ als jährlich zu erwartende Anzahl doppelter SIDS-Fälle in England und Wales. Da die Sterblichkeiten in Mehrfachgeburten verschiedener Familien unabhängig voneinander sind, können wir zur Abschätzung doppelter SIDS-Fälle eine Poisson-Verteilung

$$p_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

mit dem Erwartungswert $\lambda = 2,993$ benutzen. Die leicht berechenbare Poisson-Verteilung tritt hier als praktische Näherung der Binomialverteilung

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

auf, da die Versuchsserie n groß und die Erfolgswahrscheinlichkeit p klein ist. (Als Faustregel gilt allgemein, dass die Approximation mittels Poisson-Verteilung für $n > 50$ und $p < 0,05$ brauchbar ist.)

Die jährliche Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Familie mit doppeltem SIDS-Fall beträgt

$$p_\lambda(X \geq 1) = 1 - p_\lambda(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} = 0,95$$

Somit wiederholte sich in England und Wales fast jedes Jahr ein SIDS-Fall innerhalb einer Familie.

Im Oktober 2001 veröffentlichte die Royal Statistical Society eine Stellungnahme zu „invalid probabilistic reasoning in court“, worin auf den Fall Sally Clark Bezug genommen wurde. Eine dramatische Wendung nahm der Fall jedoch, als im Folgejahr bekannt wurde, dass der Gerichtsmediziner bei Harry eine Staphylokokken-Infektion verheimlicht hatte. Es kam zur Revision und im Januar 2003 wurde Sally Clark freigesprochen. Der Prozess hatte die Revision sämtlicher Urteile zur Folge, in denen Prof. Meadow auf ähnlicher Grundlage als Gutachter tätig war. Drei weitere Freisprüche folgten, von denen zwei Mütter des Doppelmordes und eine des Dreifachmords beschuldigt waren.

Im Jahre 2005 kamen weitere Details über den Pathologen Dr. Williams ans Licht. Als er den Beschluss zum Verschweigen der Staphylokokken-Infektion bei Harry fasste, änderte er auch die Meinung zum ersten Todesfall. Zunächst hatte er für Christopher einen Atemwegsinfekt angenommen, dann wechselte die Diagnose zum unnatürlichen Erstickungstod. Eine derart unkommentierte Meinungsänderung ist für einen beauftragten Pathologen unzulässig und er erhielt eine dreijährige Berufssperre, da ihn das Gericht nicht mehr als zuverlässig ansah. Für Prof. Meadow hatten die Revisionsprozesse weitaus schwerwiegendere Folgen, denn er verlor die ärztliche Zulassung.

Die inzwischen freigelassene Sally Clark starb im März 2007 an einer Alkoholvergiftung. Sie konnte die Tragödie ihres Lebens nicht überwinden.

5.3. Revision der Entlastungsgutachten

Es wäre zu simpel, den Prozessverlauf einzig durch ein falsches Gutachten zu charakterisieren, welches mit einer achtsamen Analyse richtiggestellt wurde. Im Todesjahr von Sally Clark unterzog Sesardic auch die Entlastungsgutachten von Dawid (2002), Hill (2004), Hill (2005) und Joyce (2002) einer Kritik. Als Datenbasis verwendete er die bereits erwähnte CESDI-Studie (siehe Fleming (2000)) aus SIDS- und Mordfällen, deren Aussagekraft jedoch hinterfragt wird. Im Folgenden soll nur die Idee skizziert werden, während für Details auf Sesardic (2007) verwiesen wird.

Sesardic's Modell

Wir bezeichnen mit den Ereignissen S_1, S_2 zwei aufeinanderfolgende hypothetische SIDS-Fälle und mit M_1, M_2 zwei aufeinanderfolgende entsprechende Kindesmorde innerhalb einer Familie. T ist ein Todesfall. Aus der Formel von Bayes folgt jeweils

$$\begin{aligned} p(S_1S_2 \mid TT) &= p(S_1S_2 \mid TT) \cdot p(TT \mid S_1S_2) && \text{bei SIDS} \\ p(M_1M_2 \mid TT) &= p(M_1M_2 \mid TT) \cdot p(TT \mid M_1M_2) && \text{bei Mord} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\frac{p(S_1S_2 \mid TT)}{p(M_1M_2 \mid TT)} = \frac{p(S_1S_2 \mid TT)}{p(M_1M_2 \mid TT)} \cdot \frac{p(TT \mid S_1S_2)}{p(TT \mid M_1M_2)} \tag{3}$$

Bekanntlich ist

$$p(S_1S_2) = p(S_1) \cdot p(S_2 \mid S_1), \qquad p(M_1M_2) = p(M_1) \cdot p(M_2 \mid M_1)$$

Setzen wir beide Gleichungen in (3) ein, so folgt für das Verhältnis wiederholter SIDS-Fälle zu wiederholten Morden

$$\frac{p(S_1S_2 \mid TT)}{p(M_1M_2 \mid TT)} = \frac{p(S \mid T)}{p(M \mid T)} \cdot \frac{p(S_2 \mid S_1)}{p(M_2 \mid M_1)} \cdot \frac{p(TT \mid S_1S_2)}{p(TT \mid M_1M_2)} \tag{4}$$

Die benötigten Eingangsparameter bezeichnen die Verhältnisse

$$\text{für SIDS-Fälle zu Morden} \quad \frac{p(S \mid T)}{p(M \mid T)} \tag{5}$$

$$\text{für die Wiederholungs-Wahrscheinlichkeiten} \quad \frac{p(S_2 \mid S_1)}{p(M_2 \mid M_1)} \tag{6}$$

$$\text{für die Wahrscheinlichkeiten für beide Hypothesen} \quad \frac{p(TT \mid S_1S_2)}{p(TT \mid M_1M_2)} \tag{7}$$

In (7) wird $p(TT \mid S_1S_2)$ als Wahrscheinlichkeit der SIDS-Hypothese (likelihood of a hypothesis) bezeichnet. Das ist die Wahrscheinlichkeit eines entsprechenden Tatbestands unter der Annahme, dass zwei SIDS-Fälle aufgetreten sind. Analog interpretiert man $p(TT \mid M_1M_2)$.

Nun soll untersucht werden, wie stark sich (4) verändert, wenn die Dunkelziffer der CESDI-Studie sowie Ergebnisse vergleichbarer Studien berücksichtigt werden.

Schätzung für das Verhältnis von SIDS-Fällen zu Morden

Wie seine Vorgänger geht Sesardic bei einem vergleichbaren Todesfall davon aus, dass SIDS die einzige Alternative zu Mord ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} p(S \mid T) + p(M \mid T) &= 1 \\ \frac{p(S \mid T)}{p(M \mid T)} &= \frac{1}{p(M \mid T)} - 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Damit hängt der erste Parameter (5) in Form einer Hyperbel von der Mordwahrscheinlichkeit ab.

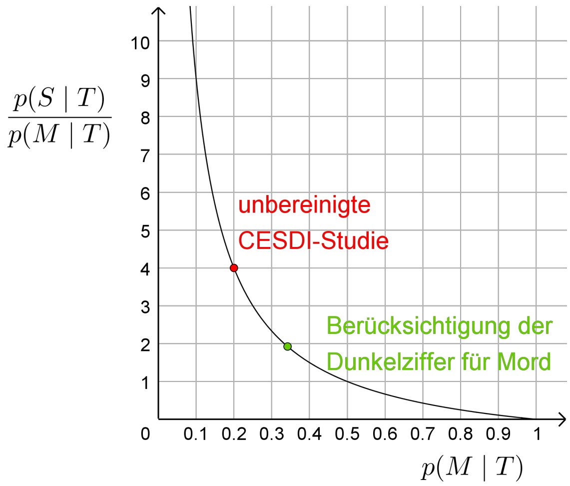


Abbildung 3: Abhängigkeit des ersten Eingangsparameters von der Mordwahrscheinlichkeit

Da SIDS selten und Mord noch seltener vorkommt, war der Datenumfang der dreijährigen CESDI-Studie nicht zu groß. Wenige falsch zugeordnete Fälle, ob Mord oder SIDS, führen zwar zu einer geringen Verschiebung der Mordrate, jedoch zur starken Verfälschung des Parameters (5).

Wie jede entsprechende Statistik enthält die CESDI-Studie eine Dunkelziffer. Sesardic (2007) zitiert Schätzungen, wonach bis zu 20 % der offiziellen SIDS-Fälle in Wirklichkeit unnatürliche Todesfälle und etwa 10 % versteckte Morde sind. Kindesmörder täuschen SIDS vor, weil das relativ leicht möglich ist. Im Gegensatz dazu würden Eltern, deren Kind durch SIDS stirbt, kaum einen Mord behaupten. Letzterer Fall, die fälschliche Klassifizierung von SIDS als Mord, ist bei einem Justizirrtum möglich. Doch die Justiz wird selten auf einen gutgetarnten Mord aufmerksam, wenn er erstmals begangen wird. In der Regel werden die Behörden erst im Wiederholungsfall misstrauisch.

Ein technisches Problem bei der Abschätzung von (5) besteht darin, dass SIDS und Mordfälle in getrennten Statistiken und auf unterschiedlicher Datenbasis erfasst wurden. Aus der allgemeinen Statistik für 1997 erhalten wir

$$t_M = 30 \text{ nachgewiesene Mordfälle bei} \quad G_{Stat97} = 642.093 \quad \text{Lebendgeburten,} \tag{9}$$

während die CESDI-Studie mit einer Stichprobe im Beobachtungszeitraum 1993-1996 arbeitet und dort

$$t_{SIDS} = 363 \text{ SIDS-Fälle bei} \quad G_{CESDI} = 472.823 \quad \text{untersuchten Lebendgeburten} \tag{10}$$

ausweist. Wenn die CESDI-Datenbasis (10) eine versteckte Mordrate r enthält, dann verbleiben

$$t_{r,SIDS} = (1-r) \cdot t_{SIDS} \qquad \text{echte SIDS-Fälle.}$$

Wollen wir die vermuteten Morde aus der Stichprobe (10) auf die Datenbasis (9) umrechnen, so müssen wir ihre Anzahl mit dem Faktor G_{Stat97}/G_{CESDI} multiplizieren. Zusammen mit den bewiesenen Mordfällen ergeben sich

$$t_{r,M} = t_M + \underbrace{r \cdot t_{SIDS} \cdot \frac{G_{Stat97}}{G_{CESDI}}}_{\text{versteckte Morde}} \qquad \text{Morde für 1997 unter Berücksichtigung der Dunkelziffer.}$$

Damit erhalten wir die

$$\text{nach unten korrigierte SIDS-Rate} \quad p_r(S) = \frac{t_{r,SIDS}}{G_{CESDI}} = \frac{(1-r) \cdot t_{SIDS}}{G_{CESDI}} \tag{11}$$

sowie die

$$\text{nach oben korrigierte Mordrate} \quad p_r(M) = \frac{t_{r,M}}{G_{Stat97}} = \frac{t_M}{G_{Stat97}} + \frac{r \cdot t_{SIDS}}{G_{CESDI}} \tag{12}$$

Unter der Annahme von $r = 10\ \%$ Mordanteil bei SIDS-Fällen folgt für das Verhältnis von SIDS zu Morden mit (5), (11) und (12)

$$\frac{p(S \mid T)}{p(M \mid T)} = \frac{p(S)/p(T)}{p(M)/p(T)} = \frac{p_r(S)}{p_r(M)} = 5{,}6 \tag{13}$$

Würde man den Parameter stattdessen auf Basis der *unbereinigten* CESDI-Studie berechnen, so überschätzt man den Wert nahezu um das Dreifache (siehe Tabelle 2).

versteckte Mordrate r	0 %	5 %	10 %	15 %	20 %
$p_r(S)/p_r(M)$	16,4	8,6	5,6	4,0	3,1

Tabelle 2: Verhältnis von SIDS-Fällen zu Morden bei CESDI-Studie mit versteckter Mordrate r

Schätzung für das Verhältnis wiederholter SIDS-Fälle zu wiederholten Morden

Untersuchen wir nun den zweiten Eingangsparameter (6). Eine kausale Abhängigkeit bei wiederholtem SIDS steht außer Zweifel, doch der Zahlenwert für $p(S_2 \mid S_1)/p(M_2 \mid M_1)$ muss hinterfragt werden. Ein Blick auf Studien aus Norwegen und den USA, die im Laufe von 14 bzw. 16 Jahren mit einem wesentlich höherem Datenvolumen durchgeführt wurden, zeigt keinen signifikanten Anstieg des SIDS-Risikos bei nachfolgenden Kindern.

Auch hier geht Sesardic davon aus, dass die starke Abhängigkeit (2) bei wiederholtem SIDS eher durch den geringen Datenumfang und Dunkelziffer der zugrundeliegenden CESDI-Studie bedingt war. Durch Vergleiche mit anderen Studien schätzt er $p(S_2 \mid S_1) \leq 4p(S_1)$, wonach er schließlich

$$p(S_2 \mid S_1) = 0{,}00069 \tag{14}$$

erhält. Bei Mord ist die Wiederholungsgefahr erheblich größer. Wenn sich eine überforderte Mutter zum Kindesmord entschließt und nicht entdeckt wird, dann ist die Versuchung hoch, das Problem später in einer ähnlichen Situation ähnlich zu „lösen“. Aufgrund seltener Daten erscheinen die Annahmen der verschiedenen Gutachter sehr willkürlich. Nach entsprechender Diskussion wählt Sesardic den im Entlastungsgutachten von Joyce (2002) verwendeten Wert

$$p_s(M_2 \mid M_1) = \frac{1}{10}, \tag{15}$$

während das Entlastungsgutachten von Hill (2004) mit der tieferen Zahl

$$p_h(M_2 \mid M_1) = 0{,}0078 \tag{16}$$

arbeitet. Setzt man alle Werte ein, so folgt im Modell von

$$\text{Hill:} \quad \frac{p(S_2 \mid S_1)}{p(M_2 \mid M_1)} = 1{,}282 \tag{17}$$

$$\text{Sesardic:} \quad \frac{p(S_2 \mid S_1)}{p(M_2 \mid M_1)} = 0{,}0069 \tag{18}$$

Das Verhältnis wiederholter SIDS-Fälle zu wiederholten Morden liegt bei Hill um den Faktor 186 höher als im Modell von Sesardic. Setzt man seine Werte (13),(18) in (4) ein, so erhält man

$$\frac{p(S_1S_2 \mid TT)}{p(M_1M_2 \mid TT)} = \frac{1}{25} \cdot \frac{p(TT \mid S_1S_2)}{p(TT \mid M_1M_2)} \tag{19}$$

Die Gleichung lässt eine bemerkenswerte Interpretation zu. A priori, also vor der Untersuchung des konkreten Falles, war die Hypothese des Doppelmordes 25 mal wahrscheinlicher als die Hypothese eines doppelten SIDS-Falles.

Vergleich der Wahrscheinlichkeiten beider Hypothesen

Zur Auswertung von (4) fehlt die Diskussion von (7). Der Gegengutachter Dawid (2002) wählte als Schätzwert

$$\frac{p(TT \mid S_1S_2)}{p(TT \mid M_1M_2)} = \frac{1}{5} \tag{20}$$

Demnach wäre ein ähnlich beunruhigender Tatbestand wie im Fall Sally Clark bei Doppelmord fünfmal so wahrscheinlich wie bei doppeltem SIDS. Zur Beurteilung von (20) rufen wir uns die Belastungsmomente in Erinnerung. Im zweiten Todesfall konstatierte der Pathologe

- ungewöhnliches Nasenbluten
- ein gerissenes Frenulum (kleine Schleimhautfalte zwischen zwei Organteilen)
- frische und umfangreiche Blutungen im Bereich der Wirbelsäule
- eine Hirnschädigung durch Sauerstoffmangel, die mindestens 3 Stunden vor dem Tod auftrat
- ein etwa vier Wochen alter Bruch der zweiten Rippe
- eine Dislokation der ersten Rippe
- petechiale Blutungen am Augenlid

Ein schwerwiegendes Indiz für Misshandlungen ist sicherlich der Rippenbruch, weil er nicht als Folge eines Wiederbelebungsversuchs erklärt werden konnte.

Wenngleich Sesardic grundsätzlich mit Dawids Wert (20) einverstanden ist, bleibt festzustellen, dass auch diese Schätzung sehr willkürlich gewählt wurde.

Bewertung der Entlastungsgutachten aus statistischer Sicht

Unter Berücksichtigung von (19) und (20) berechnen wir aus (4) für das Verhältnis wiederholter SIDS-Fälle zu wiederholten Morden

$$\frac{p(S_1S_2 \mid TT)}{p(M_1M_2 \mid TT)} = \frac{1}{125} \tag{21}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Doppelmordes liegt also um das 125-fache höher als die Wahrscheinlichkeit von doppeltem SIDS. Beschränkt man die Untersuchung ausschließlich auf die beiden Hypothesen Doppelmord und doppeltes SIDS, so ist

$$\begin{aligned} p(M_1M_2 \mid TT) + p(S_1S_2 \mid TT) &= 1 \\ p(M_1M_2 \mid TT) + \frac{1}{125} \cdot p(M_1M_2 \mid TT) &= 1 \\ p(M_1M_2 \mid TT) &= \frac{125}{126} \end{aligned} \tag{22}$$

Entsprechend finden wir als Wahrscheinlichkeit von wiederholtem SIDS

$$p(S_1S_2 \mid TT) = \frac{1}{126} = 0{,}008 \tag{23}$$

Die Werte stehen im starken Kontrast zu den Entlastungsgutachten von Dawid (2002), Hill (2004) und Joyce (2002), welche unter Verwendung des *gleichen Ansatzes* (4) die SIDS-These stützten, also zum *entgegengesetzten Ergebnis* gelangten. Doch das Ziel der voranstehenden Überlegungen sollte keinesfalls als nachträgliche Bewertung von Schuld oder Unschuld der zweifachen Mutter missverstanden werden. Stattdessen wird das Augenmerk darauf gelegt, wie unsicher viele Annahmen der obigen Entlastungsgutachten (einschließlich der Korrektur von Sesardic (2007)) waren und wie stark sich diese Unbestimmtheit auf die Aussagenbreite statistischer Analysen auswirkt. Ihre Zuverlässigkeit scheint ebenso zweifelhaft wie das Gutachten des Professors für Pädiatrie, obgleich sie von hochqualifizierten Statistikern stammten. Man sieht deutlich, dass ein Gericht in die Sackgasse käme, wenn es die Aussagekraft von Wahrscheinlichkeiten direkt in die Urteilsfindung einfließen lassen würde.

5.4. Ein unberücksichtiger Aspekt?

Mit Sally Clarks Freispruch im Januar 2003 wurde anerkannt, dass es keine Beweise gegen die Mutter gab, ihre Kinder ermordet zu haben. Eine Reihe ungewöhnlicher Verletzungen beim zweiten Kind kann durch unglückliche Wiederbelebungsversuche der in Panik geratenen Mutter erklärt werden. Wie kam es zu dieser Krise, die im nachhinein als SIDS, d.h. natürlicher Todesfall unbekannter Ursache bezeichnet wird? Ein im „Spectator" erschienener Beitrag von Hodgkinson (2007) lenkt die Aufmerksamkeit auf einen weiteren Aspekt, der alle bisher diskutierten Gutachten in einem neuen Licht erscheinen lässt.

Trotz ihrer Gegensätzlichkeit in der Schuldfrage weisen die Gutachten eine Gemeinsamkeit auf. Von vornherein wird ausgeschlossen, dass die Impfung des zweiten Kindes seinen fünf Stunden später eintretenden Tod mitverursacht haben könnte. Die Möglichkeit einer Beteiligung wird als derart irrelevant betrachtet, dass selbst die Impfung in der Literatur nur selten und höchstens am Rande erwähnt wird. Der blinde Fleck ist umso erstaunlicher, da

- Harry zum Zeitpunkt der Impfung (Grundimmunisierung gegen DPT, Hib und Polio) an einer Staphylokokken-Infektion erkrankt und somit geschwächt war,
- er im Anschluss an die Impfung für die letzten fünf Stunden seines Lebens ungewöhnlich ermüdet wirkte,
- sein biologisches Alter aufgrund vorzeitiger Geburt nur 5 Wochen betrug, wogegen die Impfung im Alter von 8 Wochen vorgesehen war.

Die damalige DTP-Komponente gegen Keuchhusten war bereits durch ihr unverhältnismäßiges Risiko bei geringem Nutzen bekannt, sodass sie in Deutschland, Italien und Japan nicht mehr verwendet wurde. Schon 1986 hatte Prof. Gordon Stewart einen 150-seitigen internen Bericht an das Gesundheitsdepartement gesandt, wo er dasselbe für Großbritannien forderte (siehe Hodgkinson (2007), Medicolegal (1986)). Im Jahre 2006 führten seine Bemühungen zum Erfolg. Weiterhin enthielt ein Impfstoff das quecksilberhaltige Konservierungsmittel Thiomersal, das britischen Kinderimpfstoffen seit 2007 ebenfalls nicht mehr beigefügt wird.

Wenn Mord als einzige Alternative zu SIDS in Frage kommt, wird die Spureninterpretation von vornherein in eine vorgefasste Richtung gelenkt. So blieb unbeachtet, dass petechiale Blutungen am Augenlid keineswegs nur Zeichen zugefügter Verletzungen sind, sondern auch nach Infektionen beobachtet werden (siehe Mlekusch (2016)).

Ein Grund für das Ausblenden der Impfung lag darin, dass es nach geltender Lehrmeinung keinerlei Kausalität zwischen verabreichter Impfung und plötzlichem Versterben gibt (siehe Duncan/Byard (2018), Medsafe (2016)). Was nicht sein kann, sollte selbst im konkreten Fall nicht in Erwägung gezogen werden. In diesem Sinne lautete die knappe Auskunft von Prof. Meadow zu Prozessbeginn, der auch die Verteidigung nicht widersprach. Nochmals wird deutlich, wie wenig statistische Berechnungen beitragen können, wenn der Blick auf die Ausgangslage durch eine vorgefasste Meinung eingeschränkt wird.

Die vorangegangenen Überlegungen sollten nicht als Beweis fehlinterpretiert werden. Dazu hätte man weitergehende Untersuchungen benötigt, die leider nie durchgeführt wurden. Schließlich sei betont, dass die Vorwürfe wegen Misshandlung des zweiten Kindes nie vollständig entkräftet werden konnten. Nach Aussagen von John L. Emery, eines Spezialisten für pädiatrische Pathologie, sind die Rippen bei Säuglingen unter einem Jahr sehr elastisch. Brüche nach Wiederbelebungsversuchen sind bedeutend seltener als Brüche nach gezieltem Griff an den Brustkorb, sodass der Tatbestand für eine vorsätzliche Gewalteinwirkung spricht (siehe Emery (1993)). Sally Clark konnte keine konsistenten Erklärungen für die Verletzungen liefern.

Die zweifache Mutter wurde freigesprochen, weil der Pathologe wesentliche Untersuchungsergebnisse unterschlug, die eine Alternative zur Mordhypothese eröffneten. Die Korrektur des Urteils wäre auch mit Beibehaltung von Meadows Modell möglich gewesen. Das Gericht hätte erkennen können, dass man Berechnungen aus statistischen Modellen niemals absolute Aussagekraft zuordnen darf, solange sie nicht durch Beweise untermauert sind.

6. Schlussfolgerungen

Beim Vergleich unserer Beispiele stellen wir fest, dass außer den mathematischen noch weitere Fehler begangen wurden. Teils blieb eine Gegenüberstellung ergebnislos, teils waren pathologische Gutachten unvollständig oder die Spurensicherung mangelhaft. Durchgehend fehlten juristische Beweise. Die entstandenen Lücken wurden durch Hypothesen ersetzt, wobei man Wahrscheinlichkeiten wissentlich oder unwissentlich zur Verschleierung missbrauchte.

Zur Vermeidung derartiger Fehler sollten Juristen erkennen, ob konkrete Beweise durch Zahlenspiele ersetzt werden bzw. ein zusätzlicher Experte für Statistik benötigt wird. Wichtig ist ferner das Bewusstsein, dass die Aussagekraft einer Statistik bei mangelhafter Datenerfassung beeinträchtigt ist. Ein Grundverständnis von Wahrscheinlichkeiten, ihren Rechenregeln und der Interpretation ist für Juristen unverzichtbar. Dem Problem wurde in einigen Ländern Rechnung getragen, indem die nationale Gesellschaft für Statistik entsprechende Leitfäden für Juristen veröffentlichte (vgl. Spiegelhalter/Wood (2007)).

Als Grundsatz gilt, dass jede Wahrscheinlichkeit eine Abstraktion ist. Bei der Prozessführung und Analyse sind diese Wahrscheinlichkeiten nützlich. Indem sie zur Eingrenzung von Hypothesen bzw. dem Ausschluss falscher Hypothesen dienen, leisten sie eine Hilfe bei der Rekonstruktion des Tatablaufs. Zur Urteilsfindung müssen Wahrscheinlichkeiten ohne Beweise verworfen werden, denn sie beschreiben keinen konkreten Fall. Verurteilungen dürfen nur erfolgen, wenn Gewissheit beim vorliegendem Tatbestand erzielt wurde, die Tat also widerspruchsfrei und glaubhaft rekonstruiert werden konnte. Anderenfalls sollte „in dubio pro reo“ ein Freispruch verkündet werden.

Literatur

Angwin, J.; Larson, J., Mattu, S.; Kirchner, L. (2016): *Machine Bias.* Online: www.propublica.org/article/machine-bias-risk-assessments-in-criminal-sentencing (Zugriff 16. 4. 2023).

Blair, PS.; Sidebotham, P.; Evason-Coombe, C.; Edmonds, M.; Heckstall-Smith, EMA.; Fleming, P. et al. (2009): *Hazardous cosleeping environments and risk factors amenable to change: case-control study of SIDS in south west England.* BMJ; 339 :b3666 doi:10.1136/bmj.b3666

Colmez, C.; Schneps L. (2013): *Wahrscheinlich Mord: Mathematik im Zeugenstand.* München: C. Hanser.

Dawid, AP. (2002): *Bayes's Theorem and Weighing Evidence by Juries,* in R. Swinburne (Hrsg.), *Bayes's Theorem*, Oxford: Oxford University Press.

Duncan, JR; Byard, RW (Hrsg.) (2018): *SIDS Sudden Infant and Early Childhood Death: The Past, the Present and the Future.* Adelaide (AU): University of Adelaide Press.

Emery, JL. (1993): *Child Abuse, Sudden Infant Death Syndrome and Unexpected Infant Death.* American Journal of Diseases in Childhood, 147, pp. 1097100.

Fleming, P.; Blair, PS.; Bacon, C.; Berry, PJ. (2000): *Sudden Unexpected Death in Infancy. The CESDI SUDI Studies 1993-1996.* London: The Stationary Office.

Good, IJ. (1995): *When batterer turns murderer.* Nature, 375(6532):541.

Hill, R. (2004): *Multiple Sudden Infant DeathsCoincidence or beyond Coincidence?* Paediatric and Perinatal Epidemiology, 18, pp. 3206.

Hill, R. (2005): *Reflections on the Cot Death Cases.*, Significance, 2, pp. 136.

Hirschberg, M. (1962): *Das Fehlurteil im Strafprozess.* Frankfurt/Main: Fischer.

Hodgkinson, N.: *Was Sally Clarks child killed by a vaccine?* The Spectator Archive, 19. 05. 2007. Online: http://archive.spectator.co.uk/article/19th-may-2007/21/was-sally-clarks-child-killed-by-a-vaccine (Zugriff 20. 4. 2023).

Joyce, H. (2002): *Beyond Reasonable Doubt.* Plus, Issue 21, ¡plus.maths.org/issue21/features/clark/¿.

Medicolegal (1986): *The Law Tries To Decide Whether Whooping Cough Vaccine Causes Brain Damage: Professor Gordon Stewart Gives Evidence.* BMJ (Clinical Research Edition) Vol. 292, No. 6530 (May 10, 1986), pp. 1264-1266.

Medsafe (2016): *Sudden Unexpected Death in Infants: No Causal Link to Vaccination.* Prescriber Update 37(4): 56-57.
Online: https://medsafe.govt.nz/profs/PUArticles/December %202016/SuddenUnexpectedDeathInInfants.htm (Zugriff 26. 4. 2023).

Mlekusch, I. (2016): *Petechien: Alarmsymptome erkennen.* Österreichische Ärztezeitung. Online: https://aerztezeitung.at/2016/oaz-artikel/medizin/petechien-exercise-induced-purpura-sulfonamiden-fettembolien-univ-prof-norbert-sepp-priv-doz-karoline-gleixner/ (Zugriff 26. 4. 2023).

Poets, CF.; Jorch, G.: *Plötzlicher Kindstod.* In: Georg F. Hoffmann et al. (Hrsg.): Pädiatrie: Grundlagen und Praxis. Berlin: Springer.

Ranicki, A. (2018): *Poincaré and Dreyfus.*
Online: www.maths.ed.ac.uk/∼v1ranick/dreyfus.htm (Zugriff 16. 4. 2023).

Sesardic, N. (2007): *Sudden Infant Death or Murder? A Royal Confusion About Probabilities.* Brit. J. Phil. Sci. 58, 299329

Spiegelhalter, D.; Wood, D. (Hrsg.) (2019): *Statistics and probability for advocates: Understanding the use of statistical evidence in courts and tribunals.* Guide designed to enable advocates to more effectively understand, recognise and manage statistics and probability statements used by expert witnesses. Endorsed by: The Inns of Court College of Advocacy, The Royal Statistical Society.
Online: http://www.rss.org.uk/Images/PDF/influencing-change/2017/ICCA-RSS-guide-version-6-branded-171019-REV03+designed-covers.pdf (Zugriff 20. 4. 2023).

Spielmann, R. (2017): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik: Mathematische Anwendungen in Natur und Gesellschaft.* Berlin: De Gruyter.

Anschrift des Verfassers

Raj Spielmann

Gymnasium Kirchenfeld
Kirchenfeldstrasse 25
CH – 3005 Bern
Schweiz

raj.spielmann@bluewin.ch